Eksantrik olarak (İstasyon dışı) yapılan Ölçülerde İndirge elemanlarının tayini

Yazan : Ekrem ULUSOY
Yük. Müh.

Nirengi ağlarında, rasatlar yapılırken teodolitin bazen istasyon mıntıkasının dışında bulunması icap eder. Bu takdirde bulunacak neticelerin esas istasyona (merkeze) döndürülmesi gerekir. İstasyon dışında yapılan ölçülere de (Eksantrik ölçüler) denir.

İstasyon dışı ölçmek mecburiyeti aşağıdaki sebeplerden ileri gelebilir:

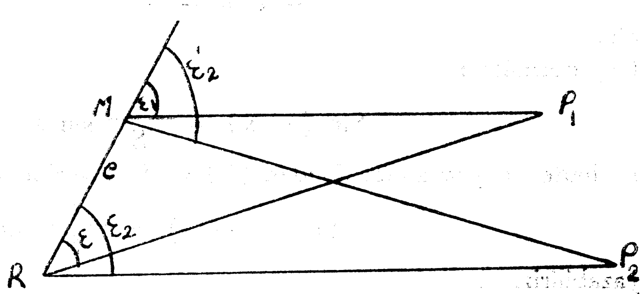
1 — Minare, kilise kulesi, bayrak direği gibi gerek üzerinde gerekse şakulünde alet kurulamıyan noktaların nirengi noktası olarak alınması hali,

2 — Helyotrop veya gece feneri ile istasyondan ışık verilirken ayni zamanda rasat yapma zarureti,

3 — Ahşap işaret altında alet kurulduğu zaman rasat doğrultusuna işaretin bir ayağının veya başka bir kısmının rastlaması (işaret dikilirken bakılacak noktalar göz önünde tutulur ve dikkat edilirse bu durum meydana gelmez),

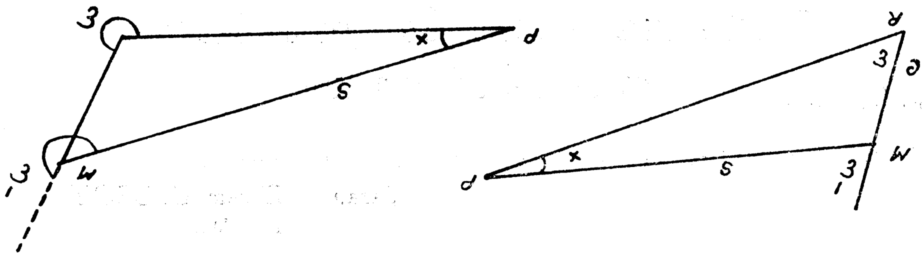
4 — Nirengi noktası olarak alınması zaruri olan bir noktada, bir veya bir kaç doğrultunun kaya veya başka bir mani ile kapanması.

Şekilde R, İstasyon dışı rasat noktasını, M ise istasyon noktasını göstermektedir. P_1 P_2 bakılan nirengi noktalarıdır. Bilindiği gibi, R deki ölçülerin M ye döndürülmesi için e = M R mesafesi ile R deki doğrultuların RM ile yaptıkları ε_1, ε_2 açılarının bilinmesine ihtiyaç vardır. e mesafesi ile ε açısına (Merkeze döndürme elemanları) denir. Bunlar yardımı ile ε'_1 ε'_2 ler bulunacaktır. ε açıları 200 grattan ya küçük veya büyüktürler. Dolayı-



(Şekil — 1)

siyle P noktaları RM nin ya sağ veya sol tarafındadırlar. (Şekil 2)



(Şekil — 2)

e mesafesi S e nazaran küçük olduğundan x açısı da küçüktür. Soldaki üçgenden :

$$\sin x = \frac{e}{S} \sin \varepsilon \qquad (1)$$

ve sağdaki üçgenden :

$$\sin x = \frac{e}{S} \sin (400 - \varepsilon) \qquad (2)$$

$$\sin x = - \frac{e}{S} \sin \varepsilon$$

elde edilir.

Her iki üçgenden $\varepsilon' - \varepsilon$ farkını bulalım :

soldaki üçgenden :

$$\varepsilon' = \varepsilon + x$$

$$\varepsilon' - \varepsilon = x \qquad (3)$$

sağdaki üçgenden :

$$400 - \varepsilon' = 400 - \varepsilon + x$$

$$\varepsilon' - \varepsilon = - x \qquad (4)$$

olur.

(2) Formülü :

$$\text{Sın} (- x) = \frac{e}{S} \sin \varepsilon \qquad (5)$$

şeklinde de yazılabileceğinden (3) ve (4) yerine genel olarak :

$$\text{Sın} (\varepsilon' - \varepsilon) = \frac{e}{S} \sin \varepsilon \qquad (6)$$

yazabiliriz.

($\varepsilon' - \varepsilon$) açısı küçük bir açıdır. Zira e miktarı S e nazaran çok küçüktür. Şu halde yaklaşık olarak

$$\text{Sın} (\varepsilon' - \varepsilon) = \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varrho}$$

yazabiliriz bu takdirde (6) formülü:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{e}{S'} \varrho \operatorname{Sın} \varepsilon \qquad (7)$$

şekline girer

(7) formülünün hatasını incelemek için sinüs serisinden faydalanalım.

$$\operatorname{Sın} x = x - \frac{x^3}{6}$$

$$x - \operatorname{sın} x = \frac{x^3}{6} \qquad (8)$$

olur. Şu halde (7) yaklaşık formülü ile hesap yapılırsa açıdaki hata

$$\Delta = \frac{x^3}{6\,\varrho^2} \qquad (9)$$

olur. Buradan:

$$x = \sqrt[3]{6\varrho^2 . \Delta} \qquad (10)$$

bulunur. $\Delta < 1^{cc}$ olması istenirse:

$$x < 1^{g}.3447$$

olması gerekir. x in bundan büyük değerleri için yaklaşık formülün kullanılamıyacağı anlaşılmaktadır. x hesabında sın ε = 1 haline göre durum incelenirse:

$$\frac{e}{S} < \frac{1}{47.3}$$

olacağı anlaşılır. Şu halde $e < \frac{S}{47.3}$ olan hallerde yaklaşık formülü daima kullanmak caizdir.

Merkeze döndürme elemanlarının bulunması :

Merkeze döndürme elemanlarının tayininde aşağıdaki haller bahis konusu olabilir :

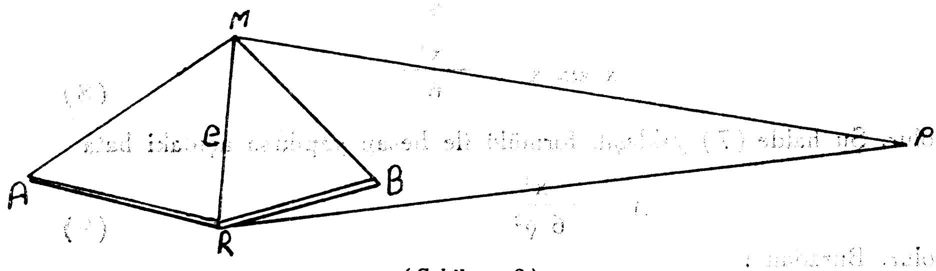
a) e ve ε nın her ikiside ölçülebilir. Bir piramidin altından bir az çekilerek yapılan ölçülerde olduğu gibi.

b) ε ölçülebilir, e ölçülemez. Bir minare veya Kuleye yerdeki bir noktadan bakılmasında olduğu gibi.

c) Gerek e, gerekse ε ölçülemez. Minarenin şerefesinden alemine bakılmasında olduğu gibi.

e ve ε nin doğrudan doğruya ölçülebilmesi halinde (7) formülüne göre indirgeme yapılır. Buna ait misaller Muhittin ARAN'ın (Haritacının el kitabı) isimli eserinin 90 ncı sayfası ile (Harita Dergisi) nin 44. ncü sayısının 33 ncü sayfasında verilmiştir. Bu sebeple yeni bir misal vermeğe lüzum yoktur.

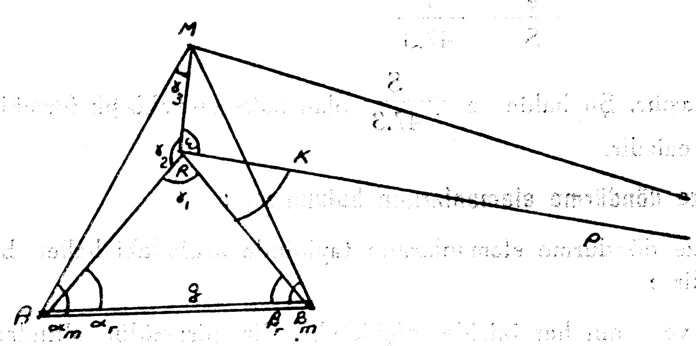
d. Hâline gelince, e nin tayini için yardımcı üçgenlerden faydalanılır. (Şekil — 3)



(Şekil — 3)

AR ve BR yerde ölçülen yardımcı uzunluklardır. A, R ve B de açı ölçüleri yapıldıktan sonra AMR ve RMB üçgenleri çözülecek RM = e ortak kenarı kontrollu olarak elde edilmiş olur.

Üçüncü halde e ve ε nın hesapla bulunması lâzımdır. Bunun için yine yerde yardımcı uzunluklar alınarak R ve M ye bakılır. Durumu, bir tek yardımcı uzunluk alındığına göre, Şekil üzerinde görelim. (Şekil — 4)



(Şekil — 4)

Merkeze döndürme elemanlarının bulunması için AB = g mesafesi ile A ve B deki α ve β açıları ölçülmüştür. Bunlarla e ve S nin hesaplanması istenmektedir. Ekseriya γ_1 de ölçülür.

Bu problem çeşitli şekilde çözülebirir :

1. nci çözüm yolu :

B noktası başlangıç ve BA, x ekseni olarak alınır. R ve M in koordinatları hesaplanır. Bunlar yardımı ile e hesaplanır. Meselâ x_r ve y_r i bulalım.

$$y_r = (g - x_r)\ tg\ \alpha_r = x_r\ tg\ \beta_r \qquad (11)$$

dır. Buradan :

$$g\ tg\ \alpha_r - x_r\ tg\ \alpha_r = x_r\ tg\ \beta_r$$

$$g\ tg\ \alpha_r = x_r\ (tg\ \alpha_r + tg\ \beta_r)$$

$$x_r = \frac{g.\ tg\ \alpha_r}{t_g\ \alpha_r + t_g\ \beta_r} \qquad (12)$$

bulunur. Kontrol olarak (g – x) i hesaplıyalım.

$$g\ tg\ \alpha_r + g\ tg\ \beta_r - g\ tg\ \beta_r = x_r\ (tg\ \alpha_r + tg\ \beta_r)$$

$$g\ (tg\ \alpha_r + tg\ \beta_r) - x_r\ (tg\ \alpha_r + tg\ \beta_r) = g\ tg\ \beta_r$$

$$g - x_r = \frac{g\ tg\ \beta_r}{tg\ \alpha_r + tg\ \beta_r} \qquad (13)$$

olur.

$x_r + (g - x_r) = g$ denklemi kontrol olarak kullanılır.

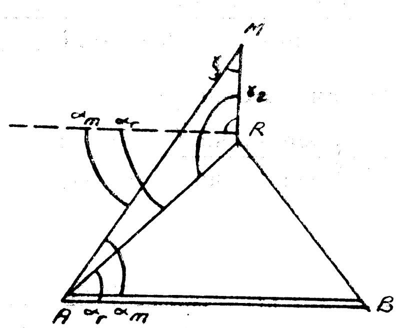
x_r bulunduktan sonra (11) formülüne göre y_r hesaplanır. Ayni suretle x_m ve y_m de elde edilir. R ve M in koordinatları bulunduktan sonra :

$$t_g\ (RM) = \frac{y_m - y_r}{x_m - x_r} \quad (14) \quad , \quad e = \frac{y_m - y_r}{Sın\ (RM)} = \frac{x_m - x_r}{cos\ (RM)} \quad (15)$$

ile (RM) açıklık açısı ve e mesafesi hesaplanır.

(RM) açısı, R den BA ya çizilen paralel ile RM arasındaki açıdır.

(Şekil – 5)



(Şekil — 5)

Dolayısiyle :

$$\gamma_2 = (RM) + \alpha_r \quad , \quad \gamma_3 = 200 - \Big((RM) + \alpha_m \Big) \qquad (16)$$

olur. R den P ile B arasındaki K açısı (Şekil — 4) ölçülmüştür. Şu halde :

$$\varepsilon = 400 - (K + \gamma_1 + \gamma_2) \qquad (17)$$

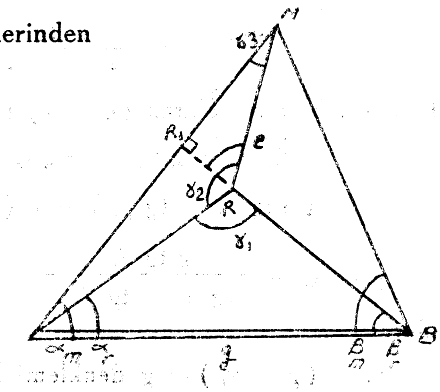
olur.

II. nci çözüm yolu :

sinüs teoremi ile AMB ve ARB üçgenlerinden

$$AM = g \frac{\sin \beta_m}{\sin(\alpha_m + \beta_m)}$$

$$AR = g \frac{\sin \beta_r}{\sin(\alpha_r + \beta_r)} \qquad (18)$$



(Şekil — 6)

elde edilir. R den AM ye dik inelim. Bu takdirde :

$AR_1 = AR. \cos(\alpha_m - \alpha_r)$, $MR_1 = e. \cos \gamma_3$ (19)

$RR_1 = AR. \sin(\alpha_m - \alpha_r) = e, \sin \gamma_3$

yazılabilir. Dolayısiyle :

$$AR. \cos(\alpha_m - \alpha_r) = AM - e . \cos \gamma_3 \qquad (20)$$

olur. AM ve AR yerine (18) deki eşitleri yazılarak :

$$e. \sin \gamma_3 = g \frac{\sin \beta_r . \sin(\alpha_m - \alpha_r)}{\sin(\alpha_r + \beta_r)}$$

$$e, \cos \gamma_3 = AM - AR . \cos(\alpha_m - \alpha_r) \qquad (21)$$

$$e. \cos \gamma_3 = - g \frac{\sin \beta_r . \cos(\alpha_m - \alpha_r) \sin(\alpha_m + \beta_m) + \sin \beta_m . \sin(\alpha_r + \beta_r)}{\sin(\alpha_r + \beta_r) . \sin(\alpha_m + \beta_m)} \qquad (22)$$

elde edilir. (21) ve (22) nin yardımı ile :

$$\cot \gamma 3 = \frac{1}{\sin(\alpha_m - \alpha_r)} \left[\frac{\sin \beta_m . \sin(\alpha_r + \beta_r)}{\sin \beta_r . \sin(\alpha_m + \beta_m)} - \cos(\alpha_m - \alpha_r) \right] \qquad (23)$$

bulunur. Kısaltmak için :

$$M = \frac{\sin \beta_m}{\sin(\alpha_m + \beta_m)} \quad , \quad N = \frac{\sin \beta_r}{\sin(\alpha_r + \beta_r)} \qquad (24)$$

yazarsak :

$$\operatorname{cotg}\gamma_3 = \frac{\frac{M}{N} - \cos(\alpha_m - \alpha_r)}{\sin(\alpha_m - \alpha_r)} \tag{25}$$

olur. γ_2 ise AMR üçgeninden bulunur.

$$\gamma_2 = 200 - (\alpha_m - \alpha_r + \gamma_3) \tag{26}$$

e mesafesini AMR den sinüs teoremi ile bulalım :

$$e = AR \frac{\sin(\alpha_m - \alpha_r)}{\sin\gamma_3} = g \frac{\sin\beta_r}{\sin\gamma_3} \cdot \frac{\sin(\alpha_m - \alpha_r)}{\sin(\alpha_r + \beta_r)}$$

olur.

$$M_1 = \sin\beta_r \,.\, \sin(\alpha_m - \alpha_r)\ ,\ N_1 = \sin\gamma_3 \,.\, \sin(\alpha_r + \beta_r) \tag{27}$$

yazalım.

$$e = g \frac{M_1}{N_1} \tag{28}$$

olur.

Kontrol olarak e yi BRM den hesaplayabiliriz. Bu yapılırsa :

$$e = g \frac{\sin\alpha_m}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot \frac{\sin(\beta_r - \beta_m)}{\sin(\alpha_m + \beta_m)} \tag{29}$$

elde edilir. Burada da :

$$M_2 = \sin\alpha_m \,.\, \sin(\beta_r - \beta_m),\ N_2 = \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \,.\, \sin(\alpha_m + \beta_m) \tag{30}$$

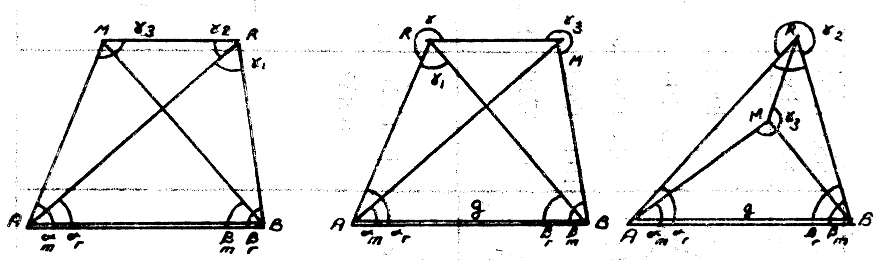
kısaltılması yapılabilir. ve :

$$e = g \frac{M_2}{N_2} \tag{31}$$

bulunur.

Her iki yol ayni ölçülere uygulanarak gösterilmiştir.

Formüllerin çıkarılmasında esas olarak alınan şekil değişik durumlar gösterilebilir. Bu durumlar aşağıda gösterilmiştir.



(Şekil — 7)

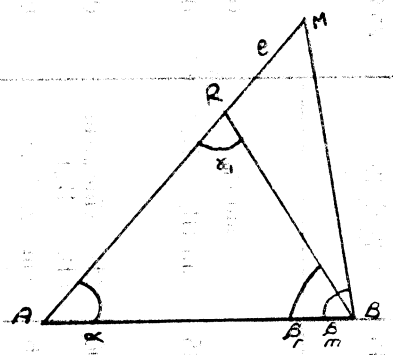
(Şekil — 6) ve (Şekil — 7) deki durumlardan başka bir de R ile M in, g nin uçlarından biri ile, ayni doğrultuda olması hali düşünülebilir. (Şekil — 8)

I

α_m β_m	68. 3210 87. 8850	g	56. 725	α_r β_r	68. 2630 76. 5325		
$tg\ \alpha_m$ $tg\ \beta_m$ $C_m = tg\alpha_m + tg\ \beta_m$ $A_m = g\ tg\ \alpha_m$ $B_m = g\ tg\ \beta_m$	1.84092 2.76194 4.60286 104. 4262 156. 6710	$X_m = \frac{A_m}{C_m}$ $g - X_m = \frac{B_m}{C_m}$ Kontrol	22. 687 34. 038 $X_m (g - X_m) = g$	$tg\ \alpha_r$ $tg\ \beta_r$ $C_r = tg\alpha_r + tg\beta_r$ $A_r = g\ tg\ \alpha_r$ $\beta_r = g\ tg\ \beta_r$	1. 83688 2. 58878 4. 42566 104.1970 146 8485	$X_r = \frac{A_r}{C_r}$ $g - X_r = \frac{B_r}{C_r}$ Kontrol : X_r	23. 544 33. 181 $+ (g - X_r) = g$
$\Delta y = y_m - y_r$ $\Delta X = X_m - X_r$	+ 1.710 — 0.857	$y_m = (g - X_m) tg\alpha_m$ $= X_m tg\ \beta_D$	62. 661 62. 660	sın (RM) cos (RM) e	0. 89401 -0. 44805 1. 913	$y_r = (g - X_r)\ tg\alpha_r$ $= X_r\ tg\ \beta_r$	60. 950 60. 950
		$tg\ (RM) \frac{\Delta y}{\Delta X}$ (RM)	−1, 99533 129, 5763			$\gamma_2 = (RM) + \alpha_r$ $\gamma_3 = 200 - [(RM) + \alpha_m]$	197. 8393 2. 1027

II

α_m	68. 3210	α_r	68. 2630	$\alpha_m - \alpha_r + \gamma_3$	2. 1593		
β_m	77. 8850	β_r	76. 5325	$\gamma_2 = 200 - (\alpha_m - \alpha_r + \gamma_3)$	197. 8407	g	56.725
$\alpha_m + \beta_m$	156. 2060	$\alpha_r + \beta_r$	144. 7955				
$\alpha_m - \alpha_r$	0. 0580	$\beta_r - \beta_m$	− 1. 3525	$\gamma_1 = 200-(\alpha_r + \beta_r)$	55. 2045	$\gamma_1 + \gamma_2$	253.0452
Sin β_m	0.94027	sinβ_r	0.93282			sin α_m	0.87872
sin $(\alpha_m + \beta_m)$	0.74796	sin $(\alpha_r + \beta_r)$	0.76249	$M_m = 200 - (\alpha_2 + \alpha_r)$	0.00085	sin $(B_r - B_m)$	— 0.02124
M = sinβ_m : sin $(d_m + \beta_m)$	1.25711	N = sinβ_r : sin $(\alpha_r + \beta_r)$	1.22339				
				sin γ_3	0.03300	M_2 = sinα_m.sin $(B_r - B_m)$	— 0.01866
				N_1 = sinγ_3 .sin $(\alpha_r + \beta_r)$	0.02516	sin $(\gamma_1 + \gamma_2)$	— 0.74011
						N_2 = sin$(\gamma_1 + \gamma_2)$ sin $(\alpha_m + B_m)$	— 0.55357
M : N	1.02756	sin $(\alpha_m - \alpha_r)$	0.00091				
cos $(\alpha_m - \alpha_r)$	1.00000	cotg. γ_3	30.28571				
M:N-cos$(\alpha_m - \alpha_r)$	0.02756	γ_3	2. 1013	$M_1 = N_1$	0.03378	$M_2 = N_2$	0.03371
				e = g $(M_1 = N_1)$	1.916	e = g$(M_2 - N_2)$	1.912



(Şekil — 8)

Bu özel durumda $\gamma_2 = 200$, $\gamma_3 = 0$ dır. e nin hesabı ise çok kolaydır.

$$AM = g \frac{\text{sın } \beta_m}{\text{sın } (\alpha + \beta_m)}, \quad AR = g \frac{\text{sın } \beta_r}{\text{sın } (\alpha + \beta_r)}$$

$$e = g \left(\frac{\text{sın } \beta_m}{\text{sın } (\alpha + \beta_m)} - \frac{\text{sın } \beta_r}{\text{sın } (\alpha + \beta_r)} \right)$$

Noktanın etrafı açık ise M, R, A nın bir doğrultuda alınması mümkün ve şayanı tavsiyedir.

Merkeze döndürme elemanları ile S in hassasiyeti :

$$\text{sın } x = \frac{e}{S} \text{ sın } \varepsilon$$

formülündeki e, ε ve S in hangi hassasiyetle bulunmaları gerektiğini inceleyelim. e, ε ve S in hataları de, $d\varepsilon$ ve dS ise diferansiyel olarak :

$$\cos x dx_e = \frac{\text{sın } \varepsilon}{S} \varrho \text{ de}$$

$$d\, x_e = \frac{\text{sın } \varepsilon}{S. \cos x} \varrho . \text{ de}$$

$$d\, x_e = \frac{\text{tg } x}{e} \varrho \text{ de} \qquad (32)$$

$$\cos x\, dx_\varepsilon = \frac{e}{S} \cos \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$d\, x\varepsilon = \text{tg } x. \text{ cotg } \varepsilon \, d\varepsilon \qquad (33)$$

$$\cos x dx_s = \frac{e \text{ sın}\varepsilon}{S^2} \text{ ds}$$

$$d\,x_s = \frac{tg\,x}{S}\,\varrho\,ds \qquad (34)$$

elde edilir.

de, dε ve dS in tesirlerinin 1 grat saniyesinden fazla olmamasını isteyelim. Bu takdirde :

$$de < \frac{e}{\varrho\,tg\,x} < \frac{e}{x} < \frac{S}{\varrho\,\sin\varepsilon} \qquad (35)$$

$$d\varepsilon < \frac{tg\,\varepsilon}{tg\,x} < \frac{tg\,\varepsilon}{x}\,.\varrho \qquad (36)$$

$$ds < \frac{S}{\varrho\,tg\,x} < \frac{S}{x} < \frac{S}{e}\,de \qquad (37)$$

olur. S mesafesini 1 Km olarak alalım ve evvelâ de için bir cetvel yapalım.

ε	de
100	0. 002 m
50	0. 002 m
25	0. 004 m
5	0. 020 m
1	0. 100 m

$\varepsilon = 0$ iken $x = 0$ olacağından (32) ye göre $d\,x_s = 0$ olur. Yani de nin bu durumda tesiri yoktur.

dε ve ds için de birer cetvel yapalım. Burada hesaba e de girecektir.

dε cetveli

e / ε	0 .50 m	1 m	5 m	10 m	20 m	50 m
90^g	1^g .28	0^g .64	0^g .13	0^g .06	0^g .03	0^g .01
50	0 .28	0 .14	0 .03	0 .01	0 .01	0 .00
25	0 .22	0 .11	0 .02	0 .01	0 .01	0 .00
5	0 .20	0 .10	0 .02	0 .01	0 .01	0 .00
1	0 .20	0 .10	0 .02	0 .01	0 .01	0 .00

ds cetveli

e / ε	0.50 m	1 m	5 m	10 m	20 m	50 m
90^g	3.18_m	1.59_m	0.32_m	0.16_m	0.08_m	0.03_m
50	4.45	2.22	0.44	0.22	0.11	0.04
25	8.21	4.11	0.82	0.41	0.21	0.08
5	40.04	20.02	4.00	2.00	1.00	0.40
1	200.01	100.00	20.00	10.00	5.00	2.00

Misal olarak e = 1 m, $\varepsilon = 25^g$, S = 1000 m alalım. de cetvelinden e nin 4 mm, dε cetvelinden ε açısının 11 santigrat ve dS cetvelinden S mesafesinin 4.11m hassasiyetle bilinmesinin kâfi olduğu görülür. Cetvellerin hesabında S = 1000 m alınmıştı. S büyürse bu miktarlar da büyür. S küçülürse küçülür.

Faydalanılan Eserler

1) Muhittin ARAN, Haritacının elkitabı

2) Selâhattin SEVGÖR, Harita Dergisi Sayı 44

3) Koll - EGGERT, Geodaetische Rechnungen

4) Jordan - Eggert, Vermessungskunde B 2

5) Zeitschrift für vermessungswesen Band 1951 Sayfa 181

6) M. Naebauer, Vermessungskunde.