

ABSTRACT

Observations and adjustment of the geodetic networks which established for deformation analyses are discussed after defining the purpose of geodetic deformation investigation. The distribution of the observations and the adjusted quantities are clarified and generalized form of the linear hypothesis and test statistics are introduced. Equivalence tests of point sets and determination of the deformed points are explained. In addition, the procedures related to the execution of the above processes together with the network adjustment are also discussed.

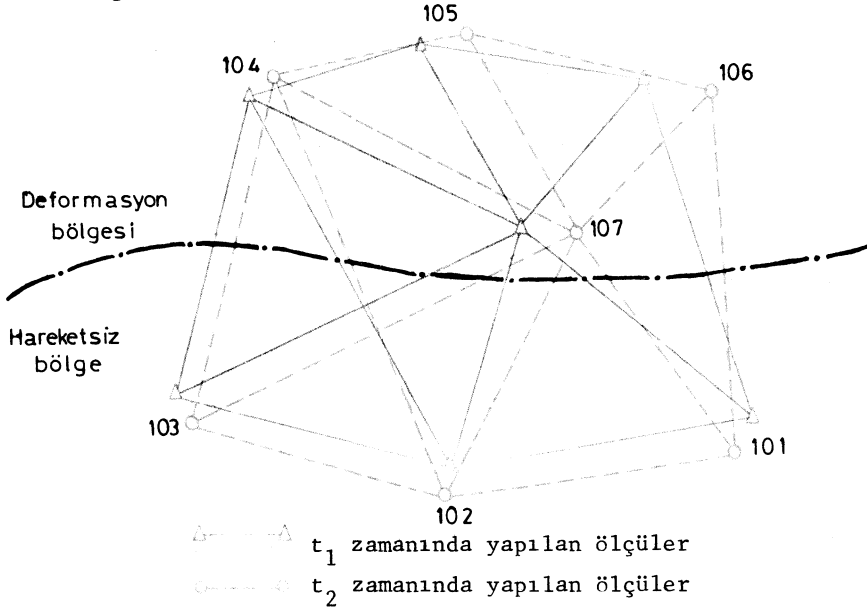
ÖZET

Geodezik deformasyon irdelemesinin amacı tanımlandıktan sonra, deformasyon analizi için kurulan jeodezik ağların dengelemesi ve ölçüleri tartışılmaktadır. Ölçülerin ve dengeli değerlerin dağılımları açıklanmakta ve doğrusal hipotezler ile test istatistiklerinin genel formları konusunda bilgi verilmektedir. Nokta kümelerinin eşdeğerlik testleri ve deforme olmuş noktaların belirlenmesi açıklanmaktadır. Ayrıca, bu işlemlerin ağ dengelemesi ile birlikte yürütülmesi konusu tartışılmaktadır.

1. GİRİŞ

Bir jeodezik nirengi, nivelman ya da gravite ağı t_1 ve t_2 zamanlarında iki kez ölçülmüş olsun. Ölçü düzeni, ölçü sayısı ve ölçme yöntemlerinin tamamen farklı da olabileceği bu iki ölçme periyodundan birincisinin dengelenmesi sonucunda elde edilen koordinatlar $\bar{x}_1$ vektöründe, ikincisinden hesaplanan dengeli koordinatlar $\bar{x}_2$ vektöründe toplansın. İki ölçüm zamanı arasında geçen süre $(t_2 - t_1)$ içinde noktaların hiçbirinde yer değiştirme (deformasyon) olmasa bile $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ koordinat vektörlerinin matematik bir kesinlikle birbirine eşit olmaları beklenemez. Koordinat vektörleri $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$, ölçü vektörleri l_1 ve l_2 de bulunan rasgele ölçü hataları nedeniyle en azından ulaşılan ölçü duyarlıklarının sınırı içinde birbirinden farklı olur. Şekil-1 de böyle bir problemde oluşan konum farkları görülmektedir. Bu ağın 105, 106 ve 107 numaralı noktalarında oldukça büyük konum farkları oluşmuştur. Söz konusu farkların rasgele ölçü hatalarının etkilerinden mi kaynaklandıklarını yoksa ağda istatistik yönden anlamlı konum değişimleri mi olduğunu saptayabilmek için $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ nokta kümelerinin eşdeğer olup olmadıkları test edilir. Nokta kümelerinin stokastik özelliklerinden yararlanarak geliştirilen eşdeğerlik testi ile

- a. Ölçüm zamanları arasında geçen süre ($t_2 - t_1$) içinde ağda istatistik yönden anlamlı konum değişiklikleri olup olmadığı belirlenir.
- b. Hangi noktalarda, ne büyüklükte konum değişimlerinin olduğu saptanır.



Şekil-1 : Bir Jeodezik Deformasyon Ağı

2. KOORDİNAT VEKTÖRLERİNİN KESTİRİM DEĞERLERİ VE DAĞILIMLARI

Üç boyutlu bir jeodezik deformasyon ağıının datumu (Koordinat eksenleri yönünde 3 öteleme + koordinat eksenleri etrafında 3 dönme + 1 ölçek katsayısı), ağı seçilen bir koordinat sistemi içerisindeki yerini, yönünü ve ölçeğini belirler. Deformasyon araştırmalarında seçilen koordinat sisteminin doğal (X,Y,Z), yerel (x,y,z) ya da elipsoidal (φ, λ, h) bir sistem olması pek fazla önem taşımaz. Burada önemli olan, başlangıçta bir kez seçilen datumun tüm araştırma süresince aynı alınmasıdır. Bu amaçla ağ noktalarının başlangıç periyodundaki ölçülerden üretilen yaklaşık koordinatları, ölçme periyotlarının tümünde yaklaşık koordinatlar olarak ele alınır ve yeni ölçülerden yararlanarak yapılan bir dengeleme işlemiyle düzeltilir. Gereğinde ortak noktalara ilişkin bu yaklaşık koordinatlarla uygulanacak birer datum dönüşümü sonucunda $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ koordinat vektörlerinin datum birliği sağlanabilir. Noktaların birbirine göre bağıl (görelî, relatif) hareketlerinin izlendiği durumlarda, başlangıçta seçilen yaklaşık koordinatlarla uygulanacak birer serbest ağ dengelemesi sonucunda elde edilen $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ koordinat vektörleri doğrudan eşdeğerlik testi ile irdelenebilir.

Jeodezik deformasyon ağırları, ele alınan araştırma için başlangıçta ön görülen duyarlık ve güven ölçütlerini sağlamalıdır. Bu ağırlarda başlangıçta bir kez seçilip uygulanan ölçme yöntemleri, araştırma süresi boyunca hep aynı kalırsa, söz konusu yöntemden kaynaklanan sistematik etkiler, karşılaştırılan periyotların tümünde benzer ve aynı büyüklükte ortaya çıkar. Eşdeğerlik testleri sırasında koordinat vektörlerinin farkları ile işlem yapıldığından belirlenen deformasyonlar, sistematik hatalardan arınmış olur.

Bir jeodezik deformasyon ağında alışlagelen klasik ölçüler yatay ve düşey doğrultular (r_{ij}, z_{ij}), eğik uzunluklar (s_{ij}) ve yükseklik farklarıdır (h_{ij}). Bu gözlemlerin dengelenmesi için nokta koordinatları bilinmeyenler olarak seçilir. Gözlemlerle bilinmeyenler arasındaki matematik ilişkilerden yararlanarak fonksiyonel model kurulur. Üç boyutlu yerel (lokal) bir deformasyon ağı, X Y Z kartezyen koordinat sisteminde tanımlanır. Bu koordinat sistemindeki x, y değerleri, ekipsoidin bir X Y dayanma (referans) düzlemine izdüşümü olarak elde edilir. Nokta yükseklikleri z, ağ noktalarının elipsoitten olan uzaklıklarıdır. Nokta sayısı p olan, üç boyutlu bir deformasyon ağının koordinat bilinmeyenleri $u = 3p$ elemanlı bir vektörde toplanabilir.

$$\bar{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & \dots & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \quad \text{Bilinmeyenler}$$

Bu koordinatları belirlemek amacıyla yapılan n sayıdaki jeodezik ölçü (Yatay Doğrultular + Düşey Açılar + Eğik uzunluklar + Yükseklik farkları) bir L gözlem vektörü ile gösterilebilir.

$$L^T = \begin{bmatrix} r_{1j} & z_{1j} & d_{1j} & h_{1j} & \dots & r_{pj} & z_{pj} & d_{pj} & h_{pj} \end{bmatrix} \quad \text{Gözlemler}$$

j: Bakılan noktanın numarası

Gözlemlerle nokta koordinatları arasındaki fonksiyonel ilişkiler, dolaylı gözlemler olarak ele alınır. Fonksiyonel modeldeki yöneltme bilinmeyenleri o_i , ölçek katsayıları λ_i ve refraksiyon katsayıları k_i gibi ek bilinmeyenler düzeltme denklemlerinden normal denklemlere geçmeden önce yok edilir.

$$\bar{L} = L + v = \varphi(\bar{x}) \quad \text{Fonksiyonel Model}$$

$\bar{L}$, $\bar{x}$: Ölçülerin ve Bilinmeyenlerin Dengeli Değerleri

v : Düzeltmeler

Doğrusal olmayan bu fonksiyonel model, yaklaşık koordinatlardan (x_0) yararlanarak doğrusallaştırılır.

$$\bar{x} = x_0 + x \quad \text{Fonksiyonel Model}$$

x : Koordinat bilinmeyenleri (yaklaşık koordinatlara dengeleme hesabı sonucunda eklenecek küçük düzeltmeler).

$$L = \varphi(x_0) + 1$$

$$\bar{l} = 1 + v = Ax \quad \text{Doğrusallaştırılmış Fonksiyonel Model}$$

$$v = Ax - 1 \quad \text{Düzeltilmeler}$$

Ağda yapılan gözlemler için yazılacak düzeltme denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir (ÖZTÜRK-ŞERBETÇİ 1989 s. 340).

a. Yatay doğrultu gözlemleri için

$$v_{r_{ij}} = a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 z_i + a_4 x_j + a_5 y_j + a_6 z_j - d_{0i} - l_{r_{ij}}$$

$$-l_{r_{ij}} = \alpha_{ij}^0 - \alpha_i^0 - r_{ij}$$

$$\alpha_{ij}^0 = \arctan \frac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0} \quad \begin{array}{l} \text{Yaklaşık koordinatlardan} \\ \text{hesaplanan açıklık açısı} \end{array}$$

i : Durulan noktanın numarası

j : Bakılan noktanın numarası

b. Düşey açı gözlemleri için

$$v_{z_{ij}} = b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 z_i + b_4 x_j + b_5 y_j + b_6 z_j + \rho d_{ij} dk_i - l_{z_{ij}}$$

$$-l_{z_{ij}} = z_{ij}^0 - d_{ij}^0 (1 - k^0) \rho / (2R) - z_{ij}$$

R : Yeryuvarının (GAUSS küresinin) yarıçapı

dk_i : i noktasındaki yaklaşık refraksiyon katsayısı k_i⁰ ye dengeleme hesabı sonucunda eklenecek küçük düzeltme

c. Eğik uzunluk ölçüleri için

$$v_{d_{ij}} = c_1 x_i + c_2 y_i + c_3 z_i + c_4 x_j + c_5 y_j + c_6 z_j - l_{d_{ij}}$$

$$-l_{d_{ij}} = d_{ij}^0 - d_{ij}$$

d. Nivelmanla bulunan ortometrik yükseklik farkları için

$$v_{h_{ij}} = -z_i + z_j - l_{h_{ij}}$$

$$-l_{h_{ij}} = z_j^0 - z_i^0 - h_{ij} - (N_j - N_i)$$

N_i, N_j : P_i ve P_j noktalarındaki jeoid yükseklikleri
(Jeoid ondülasyonları)

Stokastik model olarak gözlemlerin ağırlıkları

$$p_{r_{ij}} = s_o^2 / m_{r_{ij}}^2, \quad p_{z_{ij}} = s_o^2 / m_{z_{ij}}^2$$

$$p_{d_{ij}} = s_o^2 / m_{d_{ij}}^2, \quad p_{h_{ij}} = s_o^2 / m_{h_{ij}}^2$$

eşitliklerinden hesaplanır. Burada s_o^2 , deneysel varyansın öncül (a priori) değeridir. Karşılaştırılan ölçme periyotlarının tanı dengelemeleri sonuçları ile

$$s_o^2 = (v_1^T P_1 v_1 + v_2^T P_2 v_2 + \dots + v_k^T P_k v_k) / (f_1 + f_2 + \dots + f_k)$$

$f_1, f_2, \dots, f_k$: Tanı dengelemelerinin serbestlik dereceleri

k : Karşılaştırılan periyotların sayısı

bağıntılarından hesaplanır ve tüm periyotların dengelenmesi sırasında aynı öncül değer s_o^2 den yararlanılır.

Düzeltilme denklemlerinden GAUSS'un en küçük kareler ilkesi uyarınca

$$A^T P A x - A^T P l = 0 \text{ Normal Denklemler}$$

kurulur. Ağda henüz kesin bir datum belirlenmediğinden $A^T P A$ normal denklem katsayılar matrisi tekil (singular) yapıda bir matristir. Normal denklemlerden tek anlamlı bir çözüm elde edebilmek için katsayılar matrisinin Psodo-Tersi (MOORE-PENROSE - INVERSE) $(A^T P A)^+$ alınır ve

$$Q_{xx} = (A^T P A)^+ \quad \text{Ters Ağırlık Matrisi}$$

$$x = Q_{xx} A^T P l \quad \text{Koordinat Bilinmeyenleri}$$

$$v = A x - l \quad \text{Düzeltilmeler}$$

$$m_o^2 = v^T P v / (n - u + d) = v^T P v / f \quad \text{Deneysel Varyansın Soncul Değeri}$$

d : Ağın datum parametrelerinin sayısı

f : Ağdaki fazla ölçü sayısı (serbestlik derecesi)

$$\bar{x} = x_o + x \text{ Serbest Dengelenmiş Koordinatlar}$$

hesaplanır. Serbest dengelenmiş koordinatlar vektörü $\bar{x}$, ölçü vektörü L nin doğrusal bir fonksiyonu olduğundan normal dağılımdadır. Sözü edilen büyüklüklerin dağılımları

$$L \sim N(\bar{L}, s_o^2 Q_{11})$$

$$\bar{x} \sim N \{ (x_o + Q_{xx} A^T P l), s_o^2 Q_{xx} \}$$

bağıntıları ile gösterilebilir. Karşılaştırılan periyotlar arasında datum birliği sağlamak amacıyla uygulanan bir S - Dönüşümü sonucunda elde edilen koordinatlar ve bunların dağılımları

$$S = I - G(G^T G)^{-1} G^T \text{ Dönüşüm Matrisi}$$

G : Ortak nokta koordinatları ile oluşturulan benzerlik dönüşümü (Helmert Transformasyonu) katsayıları matrisi

I : Birim matrisi

$$x_D = S \bar{x} \quad \text{Dönüştürülmüş Koordinatlar}$$

$$Q_{xxD} = S Q_{xx} S^T \quad \text{Ters Ağırlık Matrisi}$$

$x_D \sim N(S \bar{x}, S^2 Q_{xxD})$ Dönüştürülmüş Koordinatların Dağılımı
eşitliklerinden hesaplanır.

3. DOZELTMELERİN KARELERİ TOPLAMI VE DAĞILIMI

Ölçülerle bilinmeyenler arasındaki fonksiyonel ilişkileri doğru ve tam olarak kapsayan bir fonksiyonel model için

$$E \{ l \} = Ax$$

umut değer bağıntısı geçerli olur. Uyuşumsuz ölçülerden ve sistematik hatalardan arınmış bir gözlem vektörü 1 normal dağılımdadır.

$$l \sim N(Ax, \sigma^2 Q_{ll})$$

Yukarıdaki $E \{ l \} = Ax$ umut değer bağıntısında ölçülerin umut değerleri $E \{ l \}$ ve x parametreleri bilinmez. Bu bağıntıda bilinen yalnızca A katsayılar matrisidir. Ayrıca gözlemlerin ağırlıklarını ve aralarındaki korelasyonları gösteren P matrisi her zaman bilinir ya da hesaplanabilir. Ölçülere

$$v^T P v = \min. \quad \text{En Küçük Kareler İlkesi}$$

koşulunu sağlayan küçük v düzeltmeleri ekleyerek çözümlü bir denklem sistemi oluşturulabilir. Bu sistemde çözülecek parametreler $\bar{x}$, en küçük kareler ilkesini sağlayan kestirim (tahmin) değerleridir. Parametrelerle düzeltmeler arasında

$$l + v = A \bar{x} \quad \text{Fonksiyonel Model}$$

bağıntısı kurulabilir. Buradan en küçük kareler ilkesini sağlayan

$$\bar{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l = Q_{xx}^{-1} A^T P l \quad \text{Bilinmeyenler}$$

ve

$$v = A \bar{x} - l \quad \text{Düzeltilmeler}$$

eşitliklerinden hesaplanır (AKSOY 1987) Düzeltmelerin karelerinin ağırlıklı toplamı

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{1})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{1}) \\
 &= (\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{1}^T) \mathbf{P} (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{1}) \\
 &= \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \\
 &= \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \\
 &\quad - \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} + \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \\
 &= \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} - 2 \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} + \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \\
 &\quad \mathbf{N}^+ \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+ \text{ Genelleştirilmiş Ters Özelliği} \\
 &= \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{1}^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{1}$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitlik, $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ normal denklem katsayıları matrisinin diğer genelleştirilmiş terslerinden herhangi biri olan $\mathbf{N}^+$ için de geçerlidir. Başka bir deyişle, ağırların zorlamasız ya da herhangi bir S-Datum Sisteminde dengelendiği durumlarda $\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ büyüklüğü çözüm vektörü $\bar{\mathbf{x}}$ den bağımsızdır (NIEMEIER 1985).

Yukarıdaki $\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ büyüklüğü, normal dağılımlı 1 ölçü vektörünün karesel bir fonksiyonudur. Biçim matrisi C olan bir karesel fonksiyon

$$\begin{aligned}
 f &= \mathbf{1}^T \mathbf{C} \mathbf{1}, \\
 (\mathbf{C} \mathbf{K}_{11}) . (\mathbf{C} \mathbf{K}_{11}) &= \mathbf{C} \mathbf{K}_{11} \quad \text{İdempotent}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{K}_{11}$: Ölçü vektörü 1 nin varyans-kovaryans matrisi eşitliği geçerli olduğu sürece

$\mathbf{1}^T \mathbf{C} \mathbf{1} \sim \chi^2 \left[\text{rang}(\mathbf{C}), \lambda = \frac{1}{2} \mathbf{E} \{ \mathbf{1}^T \} \mathbf{C} \mathbf{E} \{ \mathbf{1} \} \right]$
 serbestlik derecesi $f = \text{rang}(\mathbf{C})$ ve dış merkezlik parametresi λ olan $\chi^2(f, \lambda)$ Şi-Kare dağılımındadır (SEARLE 1971).

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{1}^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{1}$$

eşitliğinin her iki tarafı, birim ölçünün varyansı σ_o^2 ye bölünürse

$$\frac{\Omega}{\sigma_o^2} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_o^2} = \frac{1}{\sigma_o^2} \mathbf{1}^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{1}$$

ve

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sigma_o^2} (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \quad \text{Biçim Matrisi (Formmatrix)}$$

$$u = \text{rang}(N) = \text{rang}(A)$$

kısa gösterimleri ile

$$\text{rang}(C) = n-u = f \quad \text{Serbestlik Derecesi}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} E\{1\}^T C E\{1\} \\ &= \frac{1}{2\sigma_o^2} (Ax)^T (P - PAN^+A^TP)(Ax) \\ &= \frac{1}{2\sigma_o^2} (x^T A^T P Ax - x^T A^T P A N^+ A^T P Ax) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma_o^2} (x^T N x - x^T N N^+ N x)$$

$$N N^+ N = N$$

$\lambda = 0$ Dış Merkezlik Parametresi elde edilir. Buna göre;

$$\frac{\lambda}{\sigma_o^2} = \frac{v^T P v}{\sigma_o^2} \text{ karesel fonksiyonu } \chi^2(f) \text{ dağılımındadır. Biçim matrisi } C$$

için

$$(C K_{11}).(C K_{11}) = C K_{11} \quad \text{İdempotent}$$

ve düzeltmelerin kareleri toplamı için

$$\frac{\lambda}{\sigma_o^2} = \frac{v^T P v}{\sigma_o^2} \longrightarrow \chi^2(n-u)$$

bağıntıları yazılabilir. Burada yalnızca genelleştirilmiş ters matris özelliklerinden yararlanıldığından $\lambda = 0$ bağıntısı, ağın herhangi bir S-Datum sisteminde zorlamasız dengelendiği durumlarda çözüm vektörü $\bar{x}$ den bağımsızdır. Başka bir deyişle psoydo ters (MOORE-PENROSE INVERSE) N^+ yerine herhangi bir genelleştirilmiş ters N^- kullanılabilir. Dış merkezlik parametresi $\lambda = 0$ bağıntısı, ancak başlangıç hipotezi $E\{1\} = Ax$ umut değer eşitliğinin doğru ve tam olarak gerçekleştiği durumlarda geçerli olur. Bu nedenle her dengeleme işleminden sonra model hipotezi test edilir ve varsa, model hataları giderilerek işlemlerin tümü yinelenir (ÖZTÜRK 1987).

4. DOĞRUSAL HİPOTEZLER

Bir ağ dengelemesi probleminin matematik modeli

$$E\{1\} = Ax \quad \text{Fonksiyonel Model}$$

$$K_{11} = \sigma_o^2 Q_{11} \quad \text{Stokastik Model}$$

biçiminde kurulur ve gözlemlerin normal dağılımda oldukları

$$1 \sim N(Ax, \sigma_0^2 Q_{11})$$

varsayımına dayanarak yapılan en küçük kareler ilkesine göre dengeleme hesabı sonucunda bilinmeyenler vektörü $\bar{x}$ ve dengeli ölçüler vektörü $\bar{l} = 1 + v$ belirlenir. Ağ dengelemesi problemlerinin bir çoğunda hangi parametrelerin bilinmeyenler vektörü içinde yer alması gerektiği sorusuna, başlangıçta kesin bir yanıt verilmez. Sözelimi elektronik aletlerle ölçülen uzunluklar için ölçek katsayısının ve çekül sapması parametrelerinin de bilinmeyenler olarak işleme katılması durumlarında genişletilmiş fonksiyonel modeller ortaya çıkar. Bu türden genişletilmiş fonksiyonel model hipotezlerinin geçerli olup olmadıklarının test edilmesi gerekir. Bunun gibi mühendislik jeodezisi problemlerinin çözümü için kurulan jeodezik ağların - bazı noktaların bir doğru ya da daire yayı üzerinde bulunmaları, ağ noktalarının belirlediği doğrultulardan birkaçının birbirine dik olmaları gerektiği - türünden geometrik koşulları sağlamaları gerekebilir. Söz konusu koşulların dengeleme hesabı sonuçları ile uyumlu olup olmadıkları sorusuna yine doğrusal hipotez testleri ile yanıt verilebilir. Kısaca her türden genişletilmiş model ya da geometrik koşul, istatistik anlamda doğrusal hipotez testi olarak ele alınabilir (NIEMEIER 1985).

İstatistik anlamda her doğrusal hipotez

$$H_0 : Bx = w$$

B : Katsayılar matrisi

x : Bilinmeyen parametreler

w : Sağ taraf vektörü (Sabit, değişmez terimler)

biçiminde kurulur (SEARLE 1971 ; GRAYBILL 1976). Dengeleme sonuçlarının bu hipotezi sağlayıp sağlamadıkları, hipotez testleri ile denetlenir. Test edilmesi istenen her mühendislik problemi önce $H_0 : Bx = w$ biçiminde doğrusal bir hipotez olarak kurulur ve dengeleme sonucunda bu hipotezin geçerli olup olmadığı test edilir.

Doğrusal hipotez testi yapabilmek için Bx büyüklüğü, kestirilebilir (Tahmin edilebilir, estimable, schatzbar) bir fonksiyon olmalıdır. A matrisinin bir doğrusal dönüşümü sonucunda

$$B = DA$$

biçiminde elde edilen her fonksiyon kestirilebilir niteliktedir. Bir dengeleme probleminde birbirinden doğrusal olarak bağımsız, kestirilebilir fonksiyonların sayısı, en fazla $u = \text{rang}(A)$ kadardır. Bunun tümünü içeren sayıda fonksiyon seçme zorunluluğu yoktur. Kestirilebilir fonksiyonlara en basit örnek ola-

rak u ya da daha az sayıda dengeli gözlemden oluşan bir l_b vektörü seçilebilir. Bu durumda doğrusal dönüşüm matrisi $D = I$ birim matris olur (SCHAFFRIN 1975),

5. TEST İSTATİSTİĞİ

Kurulan doğrusal hipotezler, ölçülerin dengelenmesi sırasında koşul denklemleri gibi ele alınır. Bu durumda dengeleme hesabının matematik modeli

$$E\{l\} = Ax \quad \text{Fonksiyonel Model}$$

$$Bx = w \quad \text{Doğrusal Hipotez}$$

$$K_{11} = \sigma^2 Q_{11} \quad \text{Stokastik Model}$$

biçimini alır. Bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesi yapısındaki bu matematik modelin çözümü sonucunda elde edilecek çözüm vektörü x_H ve düzeltmelerin karelerinin ağırlıklı toplamı

$$\Omega_H = v_H^T P v_H,$$

dolaylı ölçüler dengelemesi sonuçları olan $\bar{x}$ ve $\Omega = v^T P v$ den farklıdır. Doğrusal hipotezleri de içeren yukarıdaki matematik modelde

$$\Omega_H = v_H^T P v_H + 2k^T (Bx_H - w) \quad \text{min. LAGRANGE Koşulu}$$

$$- v_H = 1 - Ax_H$$

$$\Omega_H = (1 - Ax_H)^T P (1 - Ax_H) + 2k^T (Bx_H - w)$$

yazılarak bilinmeyenler olan x_H ve LAGRANGE çarpanları k ya göre türevler (0) eşitlenirse

$$A^T P A x_H + B^T k - A^T P 1 = 0 \quad \text{Normal Denklemler}$$

$$Bx_H - w = 0$$

elde edilir. Katsayılar matrisi $A^T P A$ tekil (singular) olduğundan, normal denklemlerin ilk satırından yararlanarak bilinmeyenler

$$\begin{aligned} x_H &= (A^T P A)^+ (A^T P 1 - B^T k) \\ &= (A^T P A)^+ (A^T P 1 - (A^T P A)^+ B^T k) \end{aligned}$$

$$x_H = \bar{x} - (A^T P A)^+ B^T k$$

bağıntısı ile hesaplanır ve ikinci satırda yerine konursa

$$Bx_H = B\bar{x} - B(A^T P A)^+ B^T k = w$$

$$k = B(A^T P A)^+ B^T + (B\bar{x} - w)$$

elde edilir. Doğrusal hipotezleri de içeren matematik modeldeki bilinmeyenlerin kesin çözümü

$$x_H = \bar{x} - (A^T P A)^+ B^T \{ B(A^T P A)^+ B^T \}^+ (B\bar{x} - w)$$

eşitliğinden bulunur. Bu bağıntıdan da açıkça görüldüğü gibi doğrusal hipotezlerin bilinmeyenlere olan etkisini hesaplayabilmek için ağ dengelemesinin dışında, yeniden bir "bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesi" işlemi yapmak zorunlu değildir. Söz konusu etki, oldukça uzun bir bağıntı olan yukarıdaki son x_H eşitliğinin ikinci teriminden hesaplanabilir.

Doğrusal hipotezleri de içeren matematik modeldeki düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamı

$$\Omega_H = v_H^T P v_H = (1 - A x_H)^T P (1 - A x_H)$$

$$(1 - A x_H) = 1 - A(\bar{x} - (\bar{x} - x_H)) = 1 - A\bar{x} + A(\bar{x} - x_H)$$

$$\begin{aligned} \Omega_H = (1 - A\bar{x})^T P (1 - A\bar{x}) + (\bar{x} - x_H)^T A^T P A (\bar{x} - x_H) + (1 - A\bar{x})^T P A (\bar{x} - x_H) \\ + (\bar{x} - x_H)^T A^T P (1 - A\bar{x}) \end{aligned}$$

olur. Bu bağıntının 3. ve 4. terimlerinde

$$(1 - A\bar{x}) = -v \quad \text{ve} \quad v^T P = 0^T, \quad P v = 0$$

eşitlikleri yerine konursa

$$\Omega_H = (1 - A\bar{x})^T P (1 - A\bar{x}) + (\bar{x} - x_H)^T A^T P A (\bar{x} - x_H)$$

$$\Omega_H = v^T P v + (\bar{x} - x_H)^T A^T P A (\bar{x} - x_H)$$

bulunur.

$$(\bar{x} - x_H) = (A^T P A)^+ B^T \{ B(A^T P A)^+ B^T \}^+ (B\bar{x} - w)$$

$$R = (B\bar{x} - w)^T \{ B(A^T P A)^+ B^T \}^+ (B\bar{x} - w)$$

bağıntılarından ve kısa gösterimlerinden yararlanarak doğrusal hipotezleri de içeren bir matematik modeldeki düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamı

$$\Omega_H = v_H^T P v_H = v^T P v + R$$

$$\Omega_H = \Omega + R$$

biçiminde elde edilir. Bu bağıntıdaki R artık büyüklüğü, ölçülerin karesel bir fonksiyonudur. Söz konusu fonksiyonun biçim matrisinin rangı h ile gösterilir ve

$$C_H = B(A^T P A)^+ B^T$$

$$h = \text{rang } (C_H) = \text{rang } \{B(A^T P A)^+ B^T\}$$

eşitliğinden hesaplanır. Şi-Kare Dağılımında olan R büyüklüğünün dış merkezlik parametresi

$$\lambda_H = \frac{1}{2\sigma_o^2} E \{ (B\bar{x} - w)^T \} \left[B(A^T P A)^+ B^T \right] + E \{ B\bar{x} - w \}$$

olur. H_o başlangıç hipotezinin geçerli olduğu durumda

$$E \{ (B\bar{x} - w) \} = 0$$

olduğundan $\lambda_H = 0$ dir. $\frac{R}{\sigma_o^2}$ büyüklüğünün dağılımı için

$$\frac{R}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(h)$$

bağıntısı yazılabilir. Model hipotezi

$$E\{1\} = Ax$$

eşitliğinin geçerli olduğu durumlarda $\Omega = v^T P v$ büyüklüğü de Şi-Kare dağılımındadır.

$$\frac{\Omega}{\sigma_o^2} = \frac{v^T P v}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n-u)$$

dağılım bağıntısı verilebilir. Bu iki karesel fonksiyon R ve Ω stokastik olarak bağımsız büyüklüklerdir(KOCH 1976).

Başlangıç hipotezi $H_o: Bx = w$ koşulunun geçerli olup olmadığını irdeleyebilmek için stokastik yünden birbirinden bağımsız Şi-Kare dağılımı R/σ_o^2 ve Ω/σ_o^2 büyüklükleri

$$F = \frac{\frac{R}{\sigma_o^2 \cdot h}}{\frac{\Omega}{\sigma_o^2 (n-u)}} = \frac{\frac{R}{h}}{\frac{\Omega}{n-u}} = \frac{R}{s_o^2 \cdot h}$$

biçiminde birbirine oranlanır. F-Dağılımının tanımına göre bu oran, payın serbestlik derecesi $n_1 = h$, paydanın serbestlik derecesi $n_2 = n-u$ ve dış merkezlik parametresi λ_H olan FISHER-Dağılımındadır.

$$F \sim F[h, (n-u), \lambda_H]$$

Başlangıç hipotezi H_o' ın geçerli olduğu durumlarda

$$T = \frac{R}{2 \cdot s_{o.h}}$$

Test Büyüklüğü

merkezil F-Dağılımına uyar. Test büyüklüğü T'nin olasılık bağıntısı

$$P\{T > F_{h,(n-u),1-\alpha} | H_0\} = \alpha$$

olur. Test büyüklüğü T'nin değeri, F-Dağılımının sınır değerinden daha büyük olursa H_0 başlangıç hipotezi geçerli sayılamaz. Söz konusu kararın istatistik güveni, $S = 1 - \alpha$ kadardır.

6. NOKTA KOMELERİ İÇİN EŞDEĞERLİK TESTİ

Başlangıçta ele alınan jeodezik ağıın t_1 zamanında yapılan ölçülerini l_1 ve t_2 zamanında yapılan ölçülerini l_2 vektörlerinde toplayalım. Ağ noktalarının t_1 zamanındaki koordinatları $\bar{x}$, t_2 zamanındaki koordinatları $\bar{x}_2$ ile gösterilirse dengelemenin matematik modeli ve başlangıç hipotezi

$$l_1 + v_1 = A_1 \bar{x}_1$$

$$K_{11} = \sigma_o^2 Q_{11}$$

Matematik Model

$$l_2 + v_2 = A_2 \bar{x}_2$$

$$K_{22} = \sigma_o^2 Q_{22}$$

$H_0: E\{\bar{x}_1\} = E\{\bar{x}_2\}$ Başlangıç Hipotezi
biçiminde kurulabilir. Başka bir deyişle heriki periyoddan elde edilen dengeli koordinatların gerçek değerlerinin eşit oldukları varsayılabilir. H_0 hipotezi, $B\bar{x} = w$ genel gösterimine benzetilerek

$$H_0: \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0$$

ve

$$H_0: \begin{bmatrix} -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

yazılabilir. Bu doğrusal hipotezin genel gösterimdeki karşılıkları

$$B = \begin{bmatrix} -I & I \end{bmatrix} \quad \bar{x}^T = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^T & \bar{x}_2^T \end{bmatrix} \quad w = 0$$

olur. Doğrusal hipotezin düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamına etkisi

$$R = (B\bar{x} - w)^T \{B(A^T P A)^+ B^T\}^+ (B\bar{x} - w) \text{ Artık Büyüklük (Residual, Zuschlag)}$$

$$R = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^T \{(A_1^T P_1 A_1)^+ + (A_2^T P_2 A_2)^+\} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

eşitliklerinde

$$d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$$

$$Q_{dd} = Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} = (A_1^T P_1 A_1)^+ + (A_2^T P_2 A_2)^+$$

yerine konarak elde edilen

$$R = d^T Q_{dd}^+ d$$

bağıntısından hesaplanır (PELZER 1971). Buradaki biçim matrisi

$$C_H = Q_{dd} = Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} = (A_1^T P_1 A_1)^+ + (A_2^T P_2 A_2)^+$$

Q_{dd} nin rangı

$$h = \text{rang}(Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2})$$

eşitliğinden hesaplanır. Ağın geometrik şeklinin ve datum parametrelerinin heriki ölçme periyodunda da aynı kaldığı durumlarda

$$h = \text{rang}(Q_{x_1 x_1}) = \text{rang}(Q_{x_2 x_2}) = u_k - d = f_k$$

u_k : Ağdaki koordinat bilinmeyenlerinin sayısı

d : Ağın datum parametrelerinin sayısı

olur. Birim ölçünün kuramsal varyansı σ_o^2 nin kestirim (tahmin) değeri s_o^2

$$E\{\sigma_{o1}^2\} = E\{\sigma_{o2}^2\} = \dots = E\{\sigma_{ok}^2\} = \sigma_o^2$$

k : Karşılaştırılan periyotların sayısı

umut değer bağıntısının geçerli olduğu durumlarda

$$s_o^2 = (\Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_k) / (f_1 + f_2 + \dots + f_k) = \Omega / f$$

$$\Omega_i = v_i^T P_i v_i, f_i = n_i - u_i + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

eşitliğinden hesaplanır. Eşdeğerlik testinin test büyüklüğü

$$T = \frac{R}{s_o^2 \cdot h} = \frac{d^T Q_{dd}^+ d}{s_o^2 \cdot h}$$

ve bunun olasılık bağıntısı

$$P\{T > F_{h, f, 1-\alpha} | H_o\} = \alpha$$

biçiminde yazılır.

7. EŞDEĞER OLMAYAN NOKTALARIN BELİRLENMESİ

Eşdeğerlik testi sonucunda hesaplanan test büyüklüğü T nin değeri, F -Dağılımının ilgili sınır değerini aşarsa $S = 1 - \alpha$ kadar bir istatistik güvenle ağ

noktalarından birinde ya da birkaçında deformasyon olduğuna karar verilir. Ağda deformasyon oluşan noktaları tek tek belirleyebilmek için, d fark vektörü ve onun ters ağırlık matrisi

$$d = \begin{bmatrix} d_F \\ d_B \end{bmatrix} \quad Q_{dd}^+ = P_{dd} = \begin{bmatrix} P_{FF} & P_{FB} \\ P_{BF} & P_{BB} \end{bmatrix}$$

biçiminde alt matrislere ayrılır. Bu alt matrisler GAUSS yöntemi ile indirgenerek

$$\bar{d}_B = d_B - P_{BB}^{-1} P_{BF} d_F$$

$$\bar{P}_{FF} = P_{FF} - P_{FB} P_{BB}^{-1} P_{BF}$$

kısa gösterimleri ile $H_0: Bx-w=0$ başlangıç hipotezinin düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamına etkisi

$$R = d^T P_{dd} d = d_F^T \bar{P}_{FF} d_F + \bar{d}_B^T P_{BB} \bar{d}_B$$

biçiminde stokastik yönden bağımsız iki bileşene ayrılır. Eşdeğer olmayan noktaların belirlenmesi sırasında, sırasıyla ağın her noktası deformasyon kuşkusu bulunan B noktası olarak ele alınır. Böylelikle her yeni adımda başka bir noktanın koordinatları, alt vektör d_B olarak yazılır. Bu durumda ağın nokta sayısı p kadar aykırılık etkisi

$$R_i = (\bar{d}_B^T P_{BB} \bar{d}_B)_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

hesaplanır. Bunlardan toplam aykırılık R deki payı en büyük olan

$$R_{\max} = \max(R_i) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

noktada $S = 1-\alpha$ kadar bir istatistik güvenle deformasyon olduğuna karar verilir.

Ağda deformasyon oluşan başka noktalar bulunup bulunmadığını araştırmak için koordinat farkları vektörü d ve bunun ters ağırlık matrisi Q_{dd} ye bir S-Dönüşümü ile geriye kalan $(p-1)$ noktadan yararlanarak yeni bir datum verilir. Bu durumda G katsayılar matrisi yalnızca geriye kalan $(p-1)$ noktanın ağırlık merkezine dönüştürülmüş koordinatları ile kurulur (VAN MIERLO 1978).

$$S_i = I - G(GG^T)^{-1} G^T$$

$$d_i = S_i d$$

$$Q_{d_i d_i} = S_i Q_{dd} S_i^T$$

Bu i . datum dönüşümünden sonra fark vektörü

$$d_i = \begin{bmatrix} d_D \\ d_N \end{bmatrix} = S_i \begin{bmatrix} d_F \\ d_B \end{bmatrix} = S_i d$$

biçiminde alt matrislere ayrılır. Burada d_D ile datum dönüşümüne katılan noktalar ve d_N ile datum dönüşümüne katılmayan noktalar gösterilmektedir, d_i vektörünün d_F ve d_B alt vektörlerine ayırma işlemi, toplam aykırılıktaki payları en büyük olan $R_{\max}$ noktalarının tümü d_B vektöründe kalacak biçimde gerçekleştirilirse i. belirleme adımından sonra kalan aykırılık

$$R_{\text{Kalan}} = d_D^T Q_{DD}^{-1} d_D$$

eşitliğinden hesaplanır. Kalan aykırılık R_{Kalan} ın serbestlik derecesi

$$h_D = h - m$$

m: Deformasyon olduğu belirlenen noktaya ilişkin koordinatların sayısı ve olasılık bağıntısı

$$P \left\{ T_D = \frac{R_{\text{Kalan}}}{s_o^2 h_D} > F_{h_D, f, 1-\alpha} | H_o \right\} = \alpha$$

Bu yeni eşdeğerlik testi sonucunda ağda deformasyon oluşan başka noktaların da bulunduğu ortaya çıkarsa, (i+1). belirleme adımına geçilir. Bu durumda yeni bir S-Dönüşümü ile yeniden datum verilip alt matrislere ayrılacak büyüklükler i. adımın d_D ve Q_{DD} matrisleridir (NIEMEIER 1985).

Belirleme adımları tamamlandıktan sonra son bir S-Dönüşümü ile ağda sabit (Kararlı) kalan noktalar P_D , deformasyon olduğu kanıtlanan noktalar P_N ve deformasyon büyüklükleri d_N elde edilir.

8. GENELLEŞTİRME

$H_o: B\bar{x} - w = 0$ başlangıç hipotezinin düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamı

$$\Omega = v^T P v$$

büyükliğüne etkisi

$$R = (B\bar{x} - w)^T \{B(A^T P A)^{-1} B^T\}^{-1} (B\bar{x} - w)$$

eşitliğinden ölçüler

$$l_i + v_i = A\bar{x}_i \quad \text{Fonksiyonel Model}$$

$$K_{ii} = \sigma_o^2 Q_{ii} \quad \text{Stokastik Model}$$

$$v_i^T P_i v_i = \min. \quad \text{GAUSS En Küçük Kareler İlkesi}$$

ile dengelendikten sonra ek bir işlemle hesaplanmaktadır. Buna karşın yeni bir dengeleme işleminde $H_0: B\bar{x} - w = 0$ başlangıç hipotezini de fonksiyonel modelin içine katarak yapılacak hesaplama çok daha basıttır. Söz gelimi bir ağda t_1 ve t_2 periyotlarında yapılan ölçülerden elde edilecek ortak nokta koordinatlarının tümünün ya da bir bölümünün eşdeğer oldukları biçiminde bir H_0 hipotezi kurabilmek için bu noktalara heriki ölçme periyodunda aynı bir nokta numarası, ağın diğer noktalarına her periyod için farklı numaralar verilir. Ölçüler eşdeğer oldukları varsayılan noktalara ilişkin kısmi iz min. yapılarak topluca dengelenir.

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= A_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_I \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} & K_{11} &= \sigma_{0Q11}^2 & K_{12} &= 0 \\ l_2 + v_2 &= A_2 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} & K_{12} &= 0 & K_{22} &= \sigma_{0Q22}^2 \end{aligned}$$

$\bar{x}_I$: Ortak nokta koordinatlarından oluşan vektör

En genel durumda ölçülerin $t_1, t_2, \dots, t_k$ zamanlarında k kez yapıldıkları varsayılırsa, ortak nokta koordinatlarının tümünün ya da bir bölümünün umut değerlerinin ölçme periyotlarının hepsinde aynı kaldıklarını öngören

$$H_0: E\{\bar{x}_{I_1}\} = E\{\bar{x}_{I_2}\} = \dots = E\{\bar{x}_{I_k}\} = E\{\bar{x}_I\}$$

bir umut değer bağıntısı H_0 hipotezi olarak ele alınabilir. Bu durumda toplu dengelemenin fonksiyonel modeli

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{I1} & A_{N1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{I2} & 0 & A_{N2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{Ik} & 0 & 0 & \dots & A_{Nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_I \\ \bar{x}_{N1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{Nk} \end{bmatrix}$$

$\bar{x}_{Ni}$: Eşdeğer olmayan noktaların i numaralı periyotta yapılan ölçümlere dayalı olarak hesaplanacak koordinatları

$$i = 1, 2, \dots, k$$

A_{Ni} : $\bar{x}_{Ni}$ vektörlerinin katsayılarından oluşan alt matrisler ve stokastik modeli

$$K_{11} = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} 0_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0_{22} & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & 0_{kk} \end{bmatrix}$$

kısa gösterimle

$$1 + v_H = A_H \bar{x}_H$$

$$K_{11} = \sigma_o^2 Q_{11}$$

biçiminde kurulur. H_o hipotezine alınan noktalar için kısmi iz min. yapılarak elde edilen dengeli koordinatlar $\bar{x}_H$ ile gösterilirse, toplu dengelemeden elde edilen düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamı

$$\Omega_H = v_H^T P_H v_H \quad (1 - A_H \bar{x}_H)^T P_H (1 - A_H \bar{x}_H)$$

olur. Her periyoda ilişkin ölçülerin ayrı ayrı dengelenmesi sonucunda elde edilen düzeltmeler v_i ve bunların ağırlık matrisleri P_i ile gösterilip

$$\Omega_i = v_i^T P_i v_i \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\Omega = \sum \Omega_i, \quad f = \sum f,$$

bağıntılarından yararlanarak H_o hipotezinin düzeltmelerin ağırlıklı kareleri toplamına etkisi ve bunun serbestlik derecesi

$$R_H = \Omega_H - \Omega, \quad h = f_H - f$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Kuramsal varyans σ_o^2 nin deneysel değeri

$$s_o^2 = \Omega / f$$

olur. Bu durumda eşdeğerlik testinin test büyüklüğü ve bunun olasılık bağıntısı için

$$T_H = \frac{R_H}{s_o^2 \cdot h}$$

$$P \{T_H > F_{h, f, 1-\alpha} | H_o\} = \alpha$$

eşitlikleri geçerli olur.

Eşdeğerlik testi sonucunda hesaplanan test büyüklüğü T_H nın değeri, F-Dağılımının sınır değerini aşarsa $S = 1 - \alpha$ kadar bir istatistik güvenle ölçme periyotlarının tümünde ortak olan P_j datum noktalarının birinde ya da birkaçında deformasyon olduğuna karar verilir. Deformasyon oluşan noktalardan birini belirleyebilmek için, koordinatları $\bar{x}_I$ vektöründe bulunan datum noktaların

dan herbiri sırasıyla bu vektörün dışına çıkartılır. Her defasında yeni aykırılıklar R_j yeniden hesaplanır.

$$R_{\min} = \min(R_j) \quad j = 1, 2, \dots, n_D$$

n_D : Periyotların tümünde ortak olan datum noktalarının sayısı olan P_j noktasında $S = 1 - \alpha$ kadar bir istatistik güvenle deformasyon oluştuğuna karar verilir. Ağda deformasyon oluşan başka noktalar bulunup bulunmadığını araştırmak için $R_{\min}$ büyüklüğünden yararlanarak

$$T_{\min} = \frac{R_{\min}}{s_o^2 \cdot h_{\min}}$$

$$h_{\min} = h - m$$

m : $\bar{x}_I$ vektörünün dışına çıkarılan datum noktasına ilişkin koordinatların sayısı

yeni bir test büyüklüğü $T_{\min}$ hesaplanır. Bu test büyüklüğü de F-Dağılımının ilgili sınır değerini aşarsa, koordinatları $\bar{x}_I$ vektöründe kalan datum noktalarının herbiri sırasıyla bu vektörün dışına çıkartılarak deformasyon belirleme işlemine devam edilir.

Ağ noktalarından bir bölümünde daha başlangıçta deformasyon bulunduğundan kuşku duyulduğu durumlarda bu yöntemle kolayca deformasyon irdelemesi yapılabilmektedir. Verilerin genelleştirilmiş modele göre düzenlenmesinin oldukça yorucu olması sakıncası gözardı edilirse her zaman istatistik yönden güvenli çözüme ulaşılabilir.

9. SONUÇ

Nokta kümeleri için eşdeğerlik testi uygulanırken, yalnızca t_1 ve t_2 zamanlarında yapılan ölçülere dayalı olarak hesaplanan ortak nokta koordinatları $\bar{x}_{I1}$ ve $\bar{x}_{I2}$ vektörlerinin karşılaştırıldıkları durumlarda; 7. bölümde açıklanan "Eşdeğer Olmayan Noktaların Belirlenmesi" yöntemi ve 8. bölümde sözü edilen "Genelleştirme" yöntemi, gerek kuramsal bağıntılar ve gerekse sayısal değerler olarak aynı sonuçları vermektedir. Kısaca genelleştirme adı verilen ve k sayıda ölçme periyodunda yapılan gözlemlerin tümünün topluca değerlendirildikleri yöntemde; her yeni ölçme periyodundan elde edilen ortak nokta koordinatları $\bar{x}_{Ij}$, kendinden önceki periyotlarda eşdeğer oldukları kanıtlanan sonuçlar $\bar{x}_{I(j-1)}$ ile karşılaştırılmaktadır. Buna karşın yalnızca iki ölçme periyoduna ilişkin sonuçların karşılaştırıldığı 7. bölümde açıklanan yöntem,

ikiden daha fazla periyodun karşılaştırılması için yeterli olmamaktadır. Ölçme periyodu sonuçlarının ikişer ikişer sözgelimi $\bar{x}_{I1}$ ile $\bar{x}_{I2}$, $\bar{x}_{I1}$ ile $\bar{x}_{I3}$, . . . $\bar{x}_{I1}$ ile $\bar{x}_{Ik}$ biçiminde başlangıç periyodu ile karşılaştırılmaları ya da $\bar{x}_{I1}$ ile $\bar{x}_{I2}$, $\bar{x}_{I2}$ ile $\bar{x}_{I3}$, . . . $\bar{x}_{I(k-1)}$ ile $\bar{x}_{Ik}$ birbirini izleyen periyotların karşılaştırılmaları; $\bar{x}_{I1}$, $\bar{x}_{I2}$. . . $\bar{x}_{Ik}$ vektörlerinin stokastik özellikleri farklı olduğundan başka başka sonuçlar vermektedir. Bu nedenle ikiden daha fazla ölçme periyodundan elde edilen ortak nokta koordinatlarının topluca irdelenmesi ancak 8. bölümde açıklanan "Genelleştirme" yöntemi ile yapılabilmektedir.

Genelleştirme yönteminde, yer değiştirmiş olduğu sözgelimi 3. ölçme periyodunda kanıtlanan 11 numaralı nokta 311 olarak adlandırılmakta, 4. ve daha sonraki periyotların değerlendirilmesi sırasında 311 numara ile test edilmektedir.

Konum değişimlerinin bir atılım biçiminde j. ölçme periyodunda değil de daha önceki periyotlarda başlamış olabileceği kuşkusunu gidermek için (j-1 ve j) ya da (j-2 , j-1 ve j) periyotları yeniden topluca dengelenerek karar verilir. Bu karar dengelemesi işlemlerine söz konusu 11 numaralı noktaya yine ortak nokta olarak tek bir takım koordinat bilinmeyenini seçilerek başlanır.

K A Y N A K L A R

- /1/ AKSOY,A. : Jeodezik Değerlerin Matematik-İstatistik Testlerle İrdelenmesi, Türkiye 1. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı Bildirileri s.559-592, 23-27 ŞUBAT 1987 ANKARA
- /2/ DEMİREL,H. : S-Transformasyonu ve Deformasyon Analizi. Türkiye 1.Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı Bildirileri s.593-608, 23-27 ŞUBAT 1987 ANKARA
- /3/ GRAYBILL,F.A. : Theory and Application of the Linear Model North Scituate Massachusetts pp.704, 1976
- /4/ KOCH,K.R. : Hypothesenprüfungen für Multivariate Ausgleichungen. Mitt. Inst.Theor. Geod. Univ. Bonn 44, s. 37, 1976
- /5/ MIERLO van,J. : A Testing Procedure for Analysing Geodetic Deformation Measurements. FIG Symposium. Deformation Measurements by Geodetic Methods, Bonn 1978
- /6/ NIEMEIER,W. : Deformationsanalyse. Geodatische Netze in Landesund Ingenieurvermessung II, s.559-623 Stuttgart 1985.
- /7/ ÖZTÜRK,E. : Jeodezik Ağlarda Duyarlık ve Güven Ölçütleri. Türkiye 1. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı Bildirileri s. 641-668. 23-27 ŞUBAT 1987 ANKARA
- /8/ ÖZTÜRK,E.,ŞERBETÇİ,M. : Dengeleme Hesabı Cilt II.KTÜ Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Yayınları, Trabzon 1989.
- /9/ PELZER,H. : Zur Analyse Geodatischer Deformationsmessungen. DGK C 164 s.86, München 1971
- /10/ SCHAFFRIN,B. : Zur Verzerrtheit von Ausgleichungsergebnissen. Mitt. Inst.Theor.Geod.Univ.Bonn, 1975
- /11/ SEARLE,S.R. : Linear Modells. John Wiley Sons, New York 1971.