DAĞLIK BÖLGELERDE SERBEST HAVA ANOMALİLERİNİN PREDİKSİYONU

Talat ARIK

ÖZET

Bu çalışmada yereyin topoğrafik yapısıyla sıkı bir ilişki içinde olan serbest hava anomalilerinin prediksiyonunda uygulanabilecek enküçük kareler prediksiyon yönteminin üç değişik modeli üzerinde durulmuştur. Bu modellerden birincisinde anomalilerle yükseklikler arasındaki korelasyon hiç gözönüne alınmadan enküçük kareler prediksiyon yöntemi uygulanmıştır. İkinci modelde anomalilerle yükseklikler arasındaki korelasyon matematiksel (deterministik) bir biçimde giderilerek enküçük kareler prediksiyon yöntemi uygulanmıştır. Üçüncü modelde ise, anomalilerle yükseklikler arasındaki korelasyon, çaprazkovaryanslar kanalıyla enküçük kareler prediksiyon yönteminin içerisine sokularak elde edilen bir çözüm modeli denenmiştir.

Sayısal uygulama, konumları, arazi yükseklikleri ve gravite değerleri bilinen 33 dayanak noktası bulunan ve yaklaşık 23 km x 22 km boyutlu bir bölgede yapılmıştır. Bölge engebeli bir bölgedir. Önce dayanak noktalarında serbest hava anomalileri hesaplanmıştır. Bundan sonra dayanak noktalarının herbiri prediksiyon noktası gibi düşünülüp öteki dayanak noktasından yararlanılarak $\tilde{\Delta g}_F$ prediksiyon edilmiş anomali değerleriyle m_p prediksiyon hataları hesaplanmıştır. Bu işlem yukarıda sözedilen her üç prediksiyon modeliyle yinelenmiştir.

Dayanak noktalarındaki gerçek ve prediksiyonla bulunan anomali değerleri arasındaki farklar hesaplanmış ve bu farklara ilişkin istatistik parametreler olan umut değer ve standart sapma belirlenmiştir. Bundan başka m_p prediksiyon hatalarının umut değerleriyle standart sapmaları hesaplanmıştır. Söz konusu istatistik parametrelerle her üç prediksiyon modeli duyarlılık yönünden karşılaştırılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlara göre, bu verilerle en duyarlı prediksiyon modeli, ölçü değerleriyle prediksiyon değerleri arasındaki farklar ölçüt alındığında 2.model, m_p prediksiyon hataları ölçüt alındığında 3.model olarak ortaya çıkmaktadır.

GİRİŞ

Kuramsal olarak, yeryuvarının biçiminin, büyüklüğünün ve gravite alanının belirlenmesi ve benzeri sorunlar, tüm yeryuvarını kapsayan integraller cinsinden formülüze edilip çözülürler, (Heiskanen, Moritz, 1967). Tüm yeryuvarını kapsayan integrallere örnek olarak, STOKES ve VENING MEINESZ formülleri verilebilir. Bu iki formül gravite bilgilerinden yeryuvarının biçiminin belirlenmesi amacına hizmet eder. Fiziksel jeodezinin bu iki ünlü formülünün uygulanabilmesi için yeryuvarının her noktasında gravite değerleri bilinmelidir. Uygulamada böylesi bir koşulu geleneksel ölçü yöntemleriyle gerçekleştirmek olanaksızdır. Kaldı ki, bu gün için nokta sıklığı yönünden en yoğun gravite ağlarında bile sınırlı sayıda noktada ölçü yapılmıştır. Böylece karşımıza, gravite ölçüsü yapılmamış alanlardaki boşlukların doldurulması ya da var olan ölçülerin de sıklaştırılması biçiminde özetlenebilecek bir sorun çıkmaktadır. Kuramsal olarak tüm yeryüzü noktalarında, pratik olarak da oldukça yoğun veri gerektiren gravimetrik yöntemlerin uygulanabilmesi için, yukarıda anılan sorunun çözümü gereklidir. Başka bir deyişle gravite anomalilerinin prediksiyonu gereklidir.

Sorunun çözümü için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden enküçük kareler yöntemiyle gravite anomalilerinin prediksiyonunun temel ilkesi, dayanak noktalarındaki gravite anomalileri arasındaki istatistik ilişkilerden yararlanarak, ölçü yapılmamış noktalarda gravite anomalilerini kestirmektir.

1. GRAVİTE ANOMALİLERİNİN PREDİKSİYONU (KESTİRİMİ)

1.1. Gravite Anomalileriyle Yüksekliklere İlişkin Özkorelasyon ve Çaprazkorelasyon.

Gravite anomalileri ve yüksekliklerin kendi içlerindeki istatistik ilişkiler özkorelasyonla, birbirleriyle, başka bir deyişle anomalilerle yükseklikler arasındaki istatistik ilişkiler de çaprazkorelasyonla karekterize edilir. Söz konusu istatistik ilişkileri formülüze etmeden önce, gravite anomalilerinin ve yüksekliklerin ölçü hatalarını içermediği ve rasgele değişken oldukları varsayılacaktır. Çünkü gravite anomalilerinin, çekül sapmalarının prediksiyonunda ve yükseklik eğrilerinin prediksiyon yöntemine göre sayısal çizimlerinde, ölçü hatalarının varyansları küçük olduğundan bunları gözardı etmek prediksiyon sonuçlarını etkilemez, (Demirel, 1979).

Gravite anomalileriyle yükseklikler arasındaki çaprazkorelasyonu gözönüne almadan yalnız anomaliler arasındaki özkorelasyon gözönüne alınarak geliştirilen prediksiyon formülleri, yükseklikle korelasyonu olmayan anomalilere uygulanabilir. Yükseklikle korelasyonu olmayan anomaliler ise, izostatik anomaliler ya da belirli bir sınırlamayla Bouguer anomalileri ya da düz ve orta engebeli alanlardaki serbest hava anomalileridir, (Heiskanen, Moritz, 1967). Eğer dağlık bölgelerdeki serbest hava anomalilerinin prediksiyonu ile uğraşılacaksa, anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkorelasyon gözönüne alınmalıdır.

1.2. Enküçük Kareler Yöntemiyle Gravite Anomalilerinin Prediksiyonu.

Ölçü hatalarını içermediği ve rasgele değişken niteliğinde oldukları varsayılan gravite anomalilerinin prediksiyonu için pek çok yöntemin geliştirildiğinden söz edilmişti. Bu yöntemlerden enküçük kareler yöntemine ilişkin eşitlikler verilmeden önce, ölçü yapılmayan herhangi bir noktadaki gravite anomalisinin, dayanak noktalarındaki gravite anomalilerinin bir fonksiyonu olduğu varsayılsın. Bu varsayım, bağıntı olarak;

$$\tilde{\Delta g}_p = F(\Delta g_1 , \Delta g_2 , \ldots, \Delta g_n , \Delta h_1 , \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n , \Delta h_p) \qquad (1.1)$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki $\tilde{\Delta g}_p$ prediksiyon edilmiş (kestirilmiş) gravite anomalisini, $\Delta g_1 , \Delta g_2 , \ldots, \Delta g_n$ dayanak noktalarındaki anomalileri, $\Delta h_1 , \Delta h_2 , \ldots, \Delta h_n$'lerde

$$\Delta h_i = h_i - h_o \qquad (1.2)$$

ile verilen ve dayanak noktalarının yüksekliklerinin çalışma bölgesinin ortalama yüksekliği (h_o) ile farklarıdır. Benzer olarak Δh_p'de kestirim noktasının yüksekliğinin h_o ile farkıdır.
Sorun, (1.1) fonksiyonunun belirlenmesine indirgenmiştir. (1.1) fonksiyonunun belirlenmesine geçmeden önce iki soruya yanıt verilmelidir, (Papaoulis, A, 1965). Bu sorular şunlardır ;

* Prediksiyon sonucunda bulunacak farklarla ilgili amaç fonksiyonu ne olmalıdır?

* Stokastik büyüklükler arasındaki dönüşümün (Burada 1.1 fonksiyonu) türü ne olmalıdır?

Bu iki soruya verilecek yanıtlar çok sayıda ve göreli olabilir. Bu da çözüm yöntemlerinin çok ve karmaşık olmasına neden olur. Bu bölümdeki çözüm yöntemi için yukarıdaki sorulara verilen şu yanıtlardan yola çıkılmıştır.

Birinci Sorunun Yanıtı : Prediksiyonla bulunacak gravite anomalileriyle ($\tilde{\Delta g}_p$) bunların kesin değerleri (Δg_p) arasındaki farkların kareleri toplamı minimum olsun. Bu koşul, bizim çok iyi bildiğimiz enküçük kareler ilkesidir.

İkinci Sorunun Yanıtı : (1.1) fonksiyonunun türü, hesaplamalarda birçok kolaylıklar sağlayan doğrusal bir dönüşüm olsun.

Bu iki yanıt, prediksiyon yöntemini belirlemektedir. Bu yöntem, enküçük karelere göre doğrusal prediksiyon yöntemidir (Arık, 1986).

(1.1) dönüşümü yerine doğrusal bir dönüşüm olan,

$$\tilde{\Delta g}_p = a_{p1}\Delta g_1 + a_{p2}\Delta g_2 + \ldots + a_{pn}\Delta g_n + b_{p1}\Delta h_1 + b_{p2}\Delta h_2 + \ldots + b_{pn}\Delta h_n - b\Delta h_p \qquad (1.3)$$

eşitliği yazılabilir. (1.3) eşitliği, benzer terimlerin aynı toplam işareti ile gösterilmesiyle,

$$\tilde{\Delta g}_p = \sum_{i=1}^{n} a_{pi}\Delta g_i + \sum_{i=1}^{n} b_{pi}\Delta h_i - b\Delta h_p \qquad (1.4)$$

biçimine dönüşür. Buradaki a_{pi}, b_{pi} ve b katsayıları Δg ya da Δh'dan bağımsızdır. İstatistik diliyle buna, doğrusal regresyon ile trendin (yüksekliğe göre) alınması denir (Heiskanen, Moritz, 1967).

Herhangi bir P noktasındaki doğru gravite anomalisi Δg_p ve bunun prediksiyon sonucu hesaplanan değeri $\tilde{\Delta g}_p$ olsun. Bu anomalilerin arasındaki fark, ε_p prediksiyon hatası olup,

$$-\varepsilon_p = \Delta g_p - \tilde{\Delta g}_p = \Delta g_p - \sum_{i=1}^{n} a_{pi}\Delta g_i - \sum_{i=1}^{n} b_{pi}\Delta h_i + b\Delta h_p \qquad (1.5)$$

dir. Burada $\left[\varepsilon_p\ \varepsilon_p\right]$ = minimum ilkesi uygulanırsa; yani (1.5) bağıntısının karesi alınırsa,

$$\varepsilon_p^2 = (\Delta g_p - \sum_{i=1}^{n} a_{pi}\Delta g_i - \sum_{i=1}^{n} b_{pi}\Delta h_i + b\Delta h_p)\,(\Delta g_p - \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\Delta g_k - \sum_{k=1}^{n} b_{pk}\Delta h_k + b\Delta h_p)$$

$$\varepsilon_p^2 = \Delta g_p - 2\sum_{i=1}^{n} a_{pi}\Delta g_p\Delta g_i - 2\sum_{i=1}^{n} b_{pi}\Delta g_p\Delta h_i + 2\, b\Delta g_p\Delta h_p \qquad (1.6)$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{pi} b_{pk}\Delta g_i\Delta h_k - 2\sum_{i=1}^{n} a_{pi} b\Delta g_i\Delta h_p - 2\sum_{i=1}^{n} b_{pi} b\Delta h_i\Delta h_p$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{pi} a_{pk}\Delta g_i\Delta g_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{pi} b_{pk}\Delta h_i\Delta h_k + b^2\Delta h_p\Delta h_p$$

bulunur. (1.6) formülünün çalışma alanı üzerinden ortalaması oluşturulursa:

$$E\{\varepsilon_p^2\} = E\{\Delta g_p^2\} - 2\sum_{i=1}^{n} E\{a_{pi}\Delta g_p\ \Delta g_i\} - 2\sum_{i=1}^{n} E\{b_{pi}\Delta g_p\ \Delta h_i\}$$
$$+ 2\, b\, E\{\Delta g_p\ \Delta h_p\} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E\{a_{pi}\ b_{pi}\ \Delta g_i\ \Delta h_k\}$$
$$- 2b\sum_{i=1}^{n} E\{a_{pi}\ \Delta g_i\ \Delta h_p\} - 2b\sum_{i=1}^{n} E\{b_{pi}\ \Delta h_i\ \Delta h_p\} \qquad (1.7)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E\{a_{pi}\ a_{pk}\ \Delta g_i\ \Delta g_k\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E\{b_{pi}\ b_{pk}\ \Delta h_i\ \Delta h_k\}$$
$$+ b^2\, E\{\Delta h_p\ \Delta h_p\}$$

olur, (Moritz, 1963). Burada, rasgele değişkenlerin ve bir değişmezin ortalamasının (umut değerinin) özelliklerinden yararlanarak, bir rasgele değişken olan ε_p'lerin, Δg'lerin ve Δh'ların ortalamaları yerine,

$$E\{\varepsilon_p^2\} = m_p^2$$
$$E\{\Delta g_p^2\} = C(0) = C_o$$
$$E\{\Delta g_p\ \Delta h_p\} = B(0) = B_o$$

$$E\{\Delta h_p^2\} = A(0) = A_o$$
$$E\{\Delta g_p\ \Delta g_i\} = C(pi) = C_{pi}$$
$$E\{\Delta g_p\ \Delta h_i\} = B(pi) = B_{pi}$$
$$E\{\Delta h_p\ \Delta h_i\} = A(pi) = A_{pi} \qquad (1.8)$$
$$E\{\Delta g_i\ \Delta g_k\} = C(ik) = C_{ik}$$
$$E\{\Delta g_i\ \Delta h_k\} = B(ik) = B_{ik}$$
$$E\{\Delta h_i\ \Delta h_k\} = A(ik) = A_{ik}$$

özel gösterimleri ve bir değişmezin ortalaması (umut değeri) yine kendisine eşit olduğu gözönüne alınarak (1.7) şu şekilde yazılabilir,

$$m_p^2 = C_o - 2\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_{pi}\,\underline{C}_{pi} - 2\sum_{i=1}^{n} \underline{b}_{pi}\,\underline{B}_{pi} + 2bB_o + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_{pi}\,\underline{b}_{pk}\,\underline{B}_{ik}$$
$$-2b\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_{pi}\,\underline{B}_{pi} - 2b\sum_{i=1}^{n} \underline{b}_{pi}\,\underline{A}_{pi} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_{pi}\,\underline{a}_{pk}\,\underline{C}_{ik} \qquad (1.9)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underline{b}_{pi}\,\underline{b}_{pk}\,\underline{A}_{ik} + b^2\,\underline{A}_o$$

(1.9) bağıntısı (1.4)'ün standart hatası için temel formüldür, (Heiskanen, Moritz, 1967). m_p^2 prediksiyon standart hatasının minimum olması için gerekli koşul, m_p^2 'nin a_{pi} , b_{pi} ve b katsayılarına göre kısmi türevleri sıfır olmalıdır. Yani,

$$\frac{\partial m_p^2}{\partial a_{pi}} = \frac{\partial m_p^2}{\partial b_{pi}} = \frac{\partial m_p^2}{\partial b} = 0 \qquad (1.10)$$

olmalıdır. (1.10) kısmi türevleri açık yazılırsa :

$$\frac{\partial m_p^2}{\partial a_{pi}} = -2\underline{C}_{pi} + 2\sum_{k=1}^{n} \underline{b}_{pk}\,\underline{B}_{ik} - 2b\,\underline{B}_{pi} + 2\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_{pk}\,\underline{C}_{ik} = 0$$

$$\frac{\partial m_p^2}{\partial b_{pi}} = 2\underline{B}_{pi} + 2\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_{pk}\, \underline{B}_{ik} - 2b\, \underline{A}_{pi} + 2\sum_{k=1}^{n} \underline{b}_{pk}\, \underline{A}_{ik} = 0 \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial m_p^2}{\partial b} = 2B_o - 2\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_{pk}\, \underline{B}_{pk} - 2\sum_{k=1}^{n} \underline{b}_{pk}\, A_{pk} + 2b\, A_o = 0$$

bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapılır ve p=1 alınırsa :

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k\, \underline{C}_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \underline{b}_k\, \underline{B}_{ik} - b\, \underline{B}_i = \underline{C}_i$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k\, \underline{B}_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \underline{b}_k\, \underline{A}_{ik} - b\, \underline{A}_i = \underline{B}_i \qquad (1.12)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k\, \underline{B}_k + \sum_{k=1}^{n} \underline{b}_k\, \underline{A}_k - b\, A_o = B_o$$

elde edilir. (1.12) sistemi, n sayıda $\underline{a}_k$, n sayıda $\underline{b}_k$ ve b bilinmeyenlerini içeren 2n+1 sayıda doğrusal denklem sistemidir. Bu denklem sisteminin çözümünden $\underline{a}_k$, $\underline{b}_k$ ve b bilinmeyenleri için,

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_i \\ \underline{b}_i \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{ik} & \underline{B}_{ik} & \underline{B}_i \\ \underline{B}_{ik} & \underline{A}_{ik} & \underline{A}_i \\ \underline{B}_i & \underline{A}_i & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_i \\ \underline{B}_i \\ B_o \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

matrisiyel eşitliği elde edilir, (Moritz, 1963). (1.13) sisteminin çözümünden bulunacak $\underline{a}_i$, $\underline{b}_i$ ve b katsayıları (1.4) eşitliğinde yazılırsa $\tilde{\Delta g}$ için,

$$\tilde{\Delta g} = \begin{bmatrix} \underline{C}_i \,,\; \underline{B}_i \,,\; B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}_{ik} & \underline{B}_{ik} & \underline{B}_i \\ \underline{B}_{ik} & \underline{A}_{ik} & \underline{A}_i \\ \underline{B}_i & \underline{A}_i & A_o \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\Delta g}_i \\ \underline{\Delta h}_i \\ \Delta h \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

çözüm sistemi elde edilir. (1.13)'le verilen $\underline{a}_i$, $\underline{b}_i$ ve b katsayıları (1.9) da yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (1.14)'den bulunacak $\tilde{\Delta g}$'nin prediksiyon hatası m için,

$$m^2 = C_o - \left[\underline{C}_i\ ,\ \underline{B}_i\ ,\ B_o\right] \begin{bmatrix} \underline{C}_{ik} & \underline{B}_{ik} & \underline{B}_i \\ \underline{B}_{ik} & \underline{A}_{ik} & \underline{A}_i \\ \underline{B}_i & \underline{A}_i & A_o \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{C}_i \\ \underline{B}_i \\ B_o \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

matrisiyel eşitliği elde edilir. (1.14) ve (1.15) matrisiyel eşitlikleri $\tilde{\Delta g}$ ve prediksiyon hatası m 'in bilgisayarda hesaplanması için oldukça uygundur.

Sonuç eşitliği olarak verilen (1.14) ve (1.15) matrisiyel eşitliklerinde geçen ve (1.8)'de özel gösterimleri verilen vektör ve matrisler, anomalilere ve yüksekliklere ilişkin kovaryans vektörleri ve matrisleridir. Altı çizili ve çift indisliler matrisleri, altı çizili tek indisliler vektörleri simgelemektedir. Diğerleride skaler büyüklüklerdir.

1.3. Kovaryans ve Kovaryans Fonksiyonu.

Gravite anomalilerinin prediksiyonu için yukarıda (1.2 altbölümünde) verilen yöntemin temel ilkesi, stokastik büyüklükler arasındaki istatistiksel ilişkilere dayanmaktadır. Söz konusu istatistiksel ilişkiler özkorelasyon ve çaprazkorelasyonla karekterize edilir. Özkorelasyon, anomali ya da yüksekliklerin kendi içlerindeki istatistik ilişkileri, çaprazkorelasyon ise anomalilerle yükseklikler arasındaki istatistik ilişkileri karekterize eder.

Gravite anomalileri ve yükseklikler sıfır ortalamalı, yani,

$$E\ \{\Delta g\} = 0\ ,\ E\ \{H\} = 0 \qquad (1.16)$$

koşullarını gerçekleyen ve varyanslarıyla normlandırılmış rasgele değişkenlerse, korelasyonlar yerine kovaryanslar yazılabilir. Anomaliler ve yükseklikler için normal olarak (1.16) koşulları geçerli değildir. Bu durumda anomali ve yükseklik değerleri merkezlendirilir. Merkezlendirme işlemi için,

$$\overset{*}{\Delta g} = \Delta g_i - E\ \{\Delta g\}\ \ ,\ \ \overset{*}{\Delta h_i} = H_i - E\ \{H\} \qquad (1.17)$$

eşitlikleri kullanılır. Sıfır ortalamalı anomali ve yüksekliklere ilişkin kovaryansların kuramsal kanıtlamalara girilmeksizin dayanak noktalarının konumundan ve aralarındaki kenarların doğrultusundan bağımsız olduğu varsayılacaktır. Bu durumda kovaryans değerleri noktalar arasındaki uzaklığın bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

Merkezlendirilmiş $\overset{*}{\Delta g}$ ve $\overset{*}{\Delta h}$ rasgele değişkenlerine ilişkin özkovaryans ve çaprazkovaryans değerleri,

$$\mathrm{cov}(\overset{*}{\Delta g}_i\ \overset{*}{\Delta g}_j) = E\ \{\left[\overset{*}{\Delta g}_i - E\ \{\overset{*}{\Delta g}\}\right]\left[\overset{*}{\Delta g}_j - E\ \{\overset{*}{\Delta g}\}\right]\} \tag{1.18a}$$

$$\mathrm{cov}(\overset{*}{\Delta g}_i\ \overset{*}{\Delta h}_j) = E\ \{\left[\overset{*}{\Delta g}_i - E\ \{\overset{*}{\Delta g}\}\right]\left[\overset{*}{\Delta h}_j - E\ \{\overset{*}{\Delta h}\}\right]\} \tag{1.18b}$$

$$\mathrm{cov}(\overset{*}{\Delta h}_i\ \overset{*}{\Delta h}_j) = E\ \{\left[\overset{*}{\Delta h}_i - E\ \{\overset{*}{\Delta h}\}\right]\left[\overset{*}{\Delta h}_j - E\ \{\overset{*}{\Delta h}\}\right]\} \tag{1.18c}$$

biçiminde verilir. (1.18) eşitliklerinden hesaplanan kovaryans değerlerinden (1.18a) , anomaliler arasındaki özkovaryansı, (1.18b), anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkovaryansı ve (1.18c) de yükseklikler arasındaki özkovaryansı göstermektedir.
(1.18) eşitliklerinden hesaplanan kovaryans değerleri noktalar arasındaki d uzaklığının bir fonksiyonu olarak,

$$C(d) = \mathrm{cov}(\overset{*}{\Delta g}_i\ \overset{*}{\Delta g}_j) \tag{1.19a}$$

$$B(d) = \mathrm{cov}(\overset{*}{\Delta g}_i\ \overset{*}{\Delta h}_j) \tag{1.19b}$$

$$A(d) = \mathrm{cov}(\overset{*}{\Delta h}_i\ \overset{*}{\Delta h}_j) \tag{1.19c}$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki d, i ve j noktaları arasındaki uzaklığı simgelemektedir. Anomalilerin ve yüksekliklerin (1.16)'ya göre merkezlendirilmesinden dolayı, (1.18) eşitliklerinde geçen, $E\ \{\overset{*}{\Delta g}\}$ ve $E\ \{\overset{*}{\Delta h}\}$ sıfır olacaktır. Böylece (1.19) eşitlikleri,

$$C(d) = E\ \{\overset{*}{\Delta g}_i\ \overset{*}{\Delta g}_j\} \tag{1.20a}$$

$$B(d) = E\ \{\overset{*}{\Delta g}_i\ \overset{*}{\Delta h}_j\} \tag{1.20b}$$

$$A(d) = E\ \{\overset{*}{\Delta h}_i\ \overset{*}{\Delta h}_j\} \tag{1.20c}$$

biçimine dönüşür. Öz olarak, C(d), B(d), A(d) kovaryansları Δg^* ve Δh^*'nın ikinci momentleridir. Başka bir deyişle merkezlendirilmiş Δg^* ve Δh^* büyüklüklerinin ikili çarpımlarının ortalaması kovaryansları verir.

Dayanak noktaları arasındaki d uzunluklarının sayısı, noktalar arasındaki ikili çarpımların sayısına eşittir. Uzunluklar d_{ij} biçiminde gösterilirse, d_{ij} uzunluklarını argüman (bağımsız değişken) kabul eden $C(d_{ij})$, $B(d_{ij})$, $A(d_{ij})$ kovaryans fonksiyonları birer matris biçiminde olacaklardır. Bu matrislerin açık yazılımları,

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \ldots & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{nn} \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} \ldots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{nn} \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (1.21)

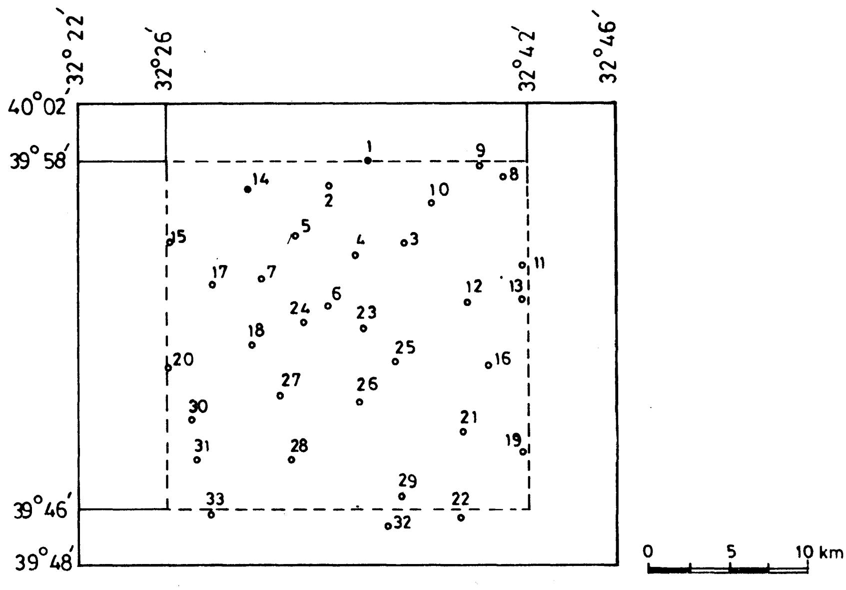
$\underline{C}$ matrisinde köşegen terimleri anomalilere ilişkin varyansı, köşegen dışındaki terimlerde kovaryansları gösterir. $\underline{B}$ matrisinde köşegen terimleri anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazvaryansı, köşegen dışındaki terimlerde çaprazkovaryansları gösterir. $\underline{A}$ matrisinde köşegen terimleri yüksekliklere ilişkin varyansı, köşegen dışındaki terimlerde kovaryansları gösterir. Burada $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ matrislerinin hesaplandıkları Δg ve Δh rasgele değişkenleri kendi varyansları ile normlandırıldıkları için (1.21)'deki matrislerin köşegen terimleri 1, diğer terimleri de 0 dan büyük 1'den küçük değerler olacaktır.

(1.20) eşitliklerinden kovaryans fonksiyonunun ve (1.21) gösterimleriyle verilen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ kovaryans matrislerinin deneysel olarak nasıl belirleneceği sayısal uygulama bölümünde anlatılacaktır.

2. SAYISAL UYGULAMA

2.1. Uygulama Bölgesi ve Veriler.

Uygulama bölgesi olarak, Türkiye I. derece nirengi ağının başlangıç noktası olan " MEŞEDAĞI " astronomik noktası ortada kalacak şekilde bir bölge seçilmiştir. Bölgenin boyutları, Kuzey-Güney doğrultusunda 12' ve Doğu-Batı doğrultusunda 16' dır. Bu boyutlara yeryüzünde karşılık gelen uzunluklar sırasıyla 22.755 Km ve 22.235 Km dir. Bölgenin büyüklüğü alansal olarak yaklaşık 500 Km^2 dir. Uygulama bölgesinin boyutları ve dayanak noktalarının yayılışları Şekil-1'de görülmektedir.



Şekil-1 : Uygulama Bölgesinin Boyutları ve Dayanak Noktalarının Yayılışları.

Konumu ve boyutları bu şekilde verilen bölgede 33 adet gravite ölçüsü yapılmış nokta bulunmaktadır. Bu noktalar bölgeye, 100 Km^2'ye yaklaşık 7 nokta düşecek biçimde dağılmış ve aralarındaki uzaklık ortalama 4 Km civarındadır.

2.2. Serbest Hava Anomalilerinin Hesabı.

Serbest hava anomalilerinin hesabı için, ölçülen g_p gravite değerine,

$$F = 0.3086 \; H \; \text{mgal} \tag{2.1}$$

eşitliğinden hesaplanan F değeri eklenir. Böylece jeoid yüzündeki g_o gravitesi (indirgenmiş gravite) bulunmuş olur. g_o indirgenmiş gravitesinden γ kuramsal gravite değeri çıkarılarak, yani,

$$\Delta g_F = g_o - \gamma = g_p + 0.3086\ H - \gamma \tag{2.2}$$

işlemi yapılarak Δg_F serbest hava anomalileri bulunur. Burada H, metre biriminde dayanak noktasının yüksekliğidir.

(2.1) ve (2.2) sayısal eşitliklerinden hesaplanan serbest hava anomalileri, jeoid dışındaki topoğrafik kitlelerin çekim etkileri gözönüne alınmadığından, yereyin topoğrafik yapısıyla sıkı bir ilişki içindedir. Bu yargıya, serbest hava anomalileriyle yükseklikler arasında yapılan korelasyon analizi sonucu varılmıştır. Anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkorelasyon çizgisel ya da sayısal olarak gösterilebilir. Bunun için Şekil-2'de Δg_F gravite anomalileri, H yüksekliklerine göre işaretlenerek anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkorelasyon gösterilmiştir. Diğer yandan anomalilerle yükseklikler çaprazkorelasyon katsayısı da r = 0.99 olarak hesaplanmıştır. Bu yüksek korelasyonu gidermek amacıyla anomalilere yükseklikle ilgili bir düzeltme terimi eklenmiştir. Bu işlem,

$$\Delta g_{FD} - \Delta g_F - b\ \Delta h_i\ ,\ \Delta h_i = H_i - H_o\ ,\ (H_o = 948.72\ m.) \tag{2.3}$$

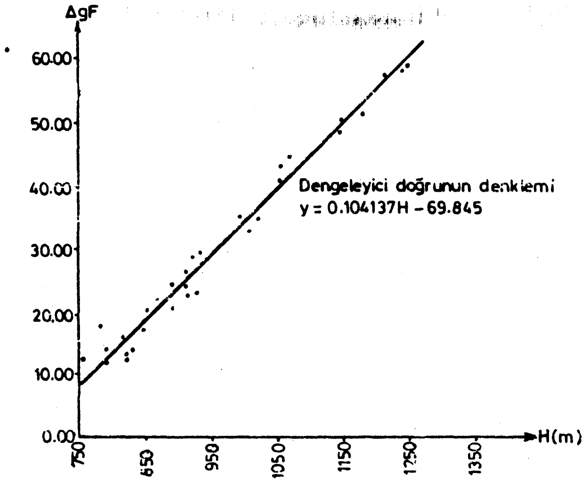
bağıntısına göre yapılmıştır. (2.3) bağıntısındaki b katsayısı, dayanak noktalarının yüksekliği (H) ve anomali (Δg_F) değerlerine göre geçirilecek dengeleyici doğrunun eğimi olacaktır. Dengeleyici doğrunun denklemi, dayanak noktalarındaki anomali ve yükseklik değerleriyle,

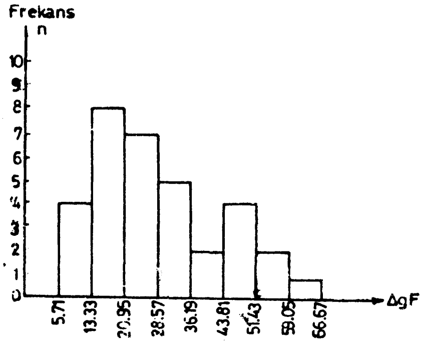
$$\Delta g_{Fi} = b\ H_i + c\ ,\quad (i=1,2,3,\ \ldots,\ n) \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir. Buradaki b ve c doğrunun parametreleridir. b ve c 'nin çözümü enküçük kareler yöntemiyle yapılarak, b = 0.104137 ve c = -69.85 değerleri bulunmuştur.

b katsayısı, ayrıntıları 2.3 altbölümünde anlatılacak olan özkovaryanslar ve çaprazkovaryanslar cinsinden de belirlenebilir. Bunun için yükseklikten dolayı düzeltilmiş serbest hava anomalileriyle yükseklikler arasındaki çaprazkovaryanslar (crossvariance) oluşturulsun. (1.17b) ye benzer olarak,

$$\mathrm{cov}(\Delta g_{FD}\ \Delta h') = E\ \{\Delta g_{FD}\ \Delta h'\} \tag{2.5}$$





Şekil-2 : Serbest Hava Anomalilerinin Yükseklikle Korelasyonu ve Dağılım Histogramı.

yazılabilir. (2.5)'de geçen Δg_{FD} 'nin (2.3)'deki eşiti dikkate alınırsa (2.5) bağıntısı,

$$cov(\Delta g_{FD} \quad \Delta h') = E\,\{\Delta g_F \quad \Delta h' - b\, \Delta h \quad \Delta h'\} \tag{2.6}$$

biçimine dönüşür. (2.6)'da (1.8)'e benzer,

$$E\,\{\Delta g_F \quad \Delta h'\} = B(s) \text{ ve } E\,\{\Delta h \quad \Delta h'\} = A(s)$$

gösterimleri kullanılarak (2.6),

$$cov(\Delta g_{FD} \quad \Delta h') = B(s) - b\, A(s) \tag{2.7}$$

olarak yazılır. Eğer Δg_{FD} anomalileri yükseklikten bağımsız olacaksa, $cov(\Delta g_{FD} \quad \Delta h')$ 'nin sıfıra özdeş olması gerekmektedir. Tüm s 'ler ve belirli bir b sabitince sağlanması gereken koşul,

$$B(s) - b\, A(s) = 0 \tag{2.8}$$

biçimindedir, (Heiskanen, Moritz, 1967). Buradan b katsayısı için,

$$b = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{2.9}$$

bağıntısı bulunur. Buradaki A(s) fonksiyonu dayanak noktalarının yüksekliklerine ilişkin özkovaryans, B(s) fonksiyonu ise, yüksekliklerle anomaliler arasındaki çaprazkovaryans fonksiyonudur.

(2.4) denklemiyle verilen doğrunun dengelenmesinden bulunan b katsayısı ile (2.9)'dan hesaplanacak b katsayısının s=0 için özdeş oldukları gösterilebilir. b 'nin sayısal değeri için, A(s) ve B(s) fonksiyonlarında s=0 alınarak hesaplanan değerler (2.9)'da yazılırsa,

$$b = \frac{2143.75500}{20398.22641} = 0.105095$$

bulunur. Bu b değeri (2.3)'de yazılarak, düzeltilmiş serbest hava anomalileri için,

$$\Delta g_{FD} = \Delta g_F - 0.105095 \quad \Delta h \qquad (2.10)$$

sayısal eşitliği elde edilir. (2.10) eşitliğine göre hesaplanan anomalilerle yükseklikler arasında yeniden hesaplanan korelasyon katsayısı r = -0.07 olarak bulunmuştur.

Bundan sonra anlatılacak sayısal hesaplamalar her iki anomali grubu için (Δg_F ve Δg_{FD}) ayrı ayrı yapılmıştır. Anomali ve yüksekliklere ilişkin istatistik bilgiler Çizelge-1'de görülmektedir.

	Nokta Sayısı	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma	Yükseklikle Korelasyon	Max. Değer	Min. Değer
Δg_F	33	28.952 mgal	15.243 ±2.653	+0.99 ±0.025	59.19 mgal	9.53 mgal
Δg_{FD}	33	28.953 mgal	2.062 ±0.359	-0.07 ±0.179	33.21 mgal	25.58 mgal
H	33	948.720 m.	145.040 ±25.248	-	1247.85 m.	750.58 m.

Çizelge-1 : Serbest Hava Anomalilerine ve Yüksekliklere İlişkin İstatistik Bilgiler.

2.3. Bölgesel Kovaryans Fonksiyonunun Belirlenmesi.

2.31 Gravite Anomalilerinin Merkezlendirilmesi.

1.3 altbölümünde, gravite anomalilerinin ve yüksekliklerin sıfır ortalamalı ve kendi varyanslarıyla normlandırılmış rasgele değişkenlerse, korelasyonlar yerine kovaryansların kullanılabileceğinden söz edilmişti. Bölgesel çalışıldığı için anomali ve yüksekliklerin sıfır ortalamalı olması koşulu gerçekleşmez. Bu durumda anomali ve yüksekliklerin merkezlendirilmeleri gerekir. Merkezlendirme işlemi, veri uzayından düşük dereceli bir yüzey geçirilerek yapılabilir. Burada basit olması bakımından hem anomali hem de yükseklik veri uzayından anomali ve yüksekliklerin aritmetik ortalamalarıyla tanımlanan yatay bir düzlem geçirilmiştir. Yani (1.16)'ya göre,

$$\begin{aligned} \Delta g_i^* &= \Delta g_i - E\{g\} \\ \Delta h_i^* &= H_i - E\{H\} \end{aligned} \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (2.11)$$

işlemleri her dayanak noktasında yapılarak merkezlendirilmiş anomali ve yükseklikler elde edilmiştir.

2.32 Kovaryans Değerlerinin Hesaplanması.

(2.11) eşitliklerine göre merkezlendirilmiş olan anomali ve yükseklikle-re ilişkin özkovaryans ve çaprazkovaryans değerlerinin sayısal olarak elde edilmesinde izlenen işlem sırası şöyledir :

• Δg^{*} ve Δh^{*} değerlerinin kuşak (zon) aralığına göre gruplandırılması : Gruplandırma işlemi,

$$D_k - \Delta d < d_{ij} < D_k + \Delta d \qquad (2.12)$$

denetleme formülüyle yapılır. Bu formüldeki,

D_k : k.ıncı kuşağın ortalama yarıçapını,

Δd : Kuşak aralığının yarısını,

d_{ij} : i ve j noktaları arasındaki uzaklığı

simgelemektedir. Kuşak ortalama yarıçapı D_k ile kuşak aralığının yarısı Δd arasında,

$$D_k = 2\ (\ k - 1\ )\ \ \Delta d \qquad (2.13)$$

ilişkisi vardır. (2.13) ilişkisi (2.12) formülüyle birlikte düşünülürse ;

$$\Delta d(\ 2k - 3\ ) < d_{ij} < (\ 2k - 1\ )\ \ \Delta d \qquad (2.14)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdan da görülebileceği gibi grup ya da kuşak sınırları, Δd ile ilişkilidir. Δd 'nin seçimi için kesin bir kural olmamakla birlikte, deneysel ya da sezgisel olarak seçilebilir. Dayanak noktaları arasındaki olası tüm ikili çarpımların sayısı, n nokta sayısı olmak üzere,

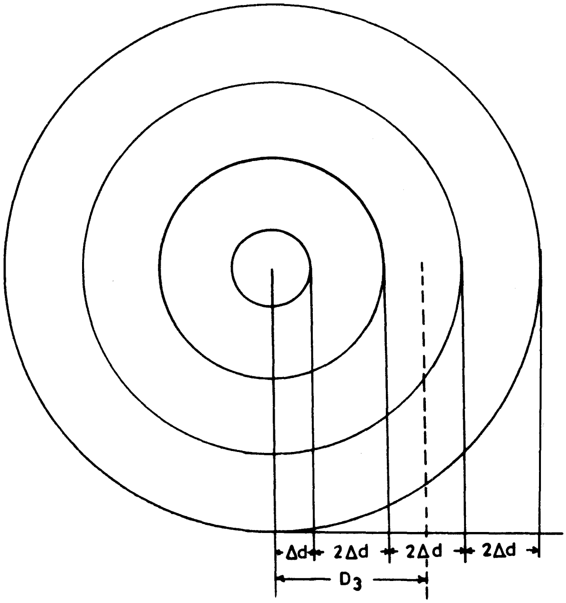
$$N = \frac{n!}{2!(n-2)!} \qquad (2.15)$$

formülüyle bulunur. Herhangi bir kuşakdaki ikili çarpım sayısı ise, Δd ve

d_{ij} 'ye bağlı olduğundan Δd 'nin seçimi ve d_{ij} 'lerin hesaplanması sonucu bulunabilir.

• Kuşaklardaki kovaryans değerlerinin hesaplanması :

Δd parametresinin seçilmesiyle, altprogramlar içerisinde sayısal olarak oluşan kalıplardan (şablonlardan) yararlanılarak dayanak noktaları arasında anomali ve yüksekliklerin ikili çarpımları gerçekleştirilir. Kalıpların geometrik görünümü Şekil-3'de görülmektedir.



Şekil-3 : Kalıpların Geometrik Görünümü.

$$\underline{C}_{ij} = C(d_{ij}) = E\{\Delta g_i^* \;\; \Delta g_j^*\} \tag{2.16a}$$

$$\underline{B}_{ij} = B(d_{ij}) = E\{\Delta g_i^* \;\; \Delta h_j^*\} \tag{2.16b}$$

$$\underline{A}_{ij} = A(d_{ij}) = E\{\Delta h_i^* \;\; \Delta h_j^*\} \tag{2.16c}$$

formülleriyle her kuşakdaki ikili çarpımlar üzerinden oluşturulacak ortalamalar, uzaklığın bir fonksiyonu olarak kovaryans değerlerini verecektir. Noktalar arasındaki d_{ij} uzunlukları,

$$\cos\psi_{ij} = \sin\phi_i \sin\phi_j + \cos\phi_i \cos\phi_j \cos(\lambda_i - \lambda_j) \tag{2.17}$$

eşitliğinden hesaplanan ψ_{ij} açısal uzunluğu,

$$d_{ij} = R\,\psi_{ij} \tag{2.18}$$

formülünde yerine yazılarak hesaplanır.

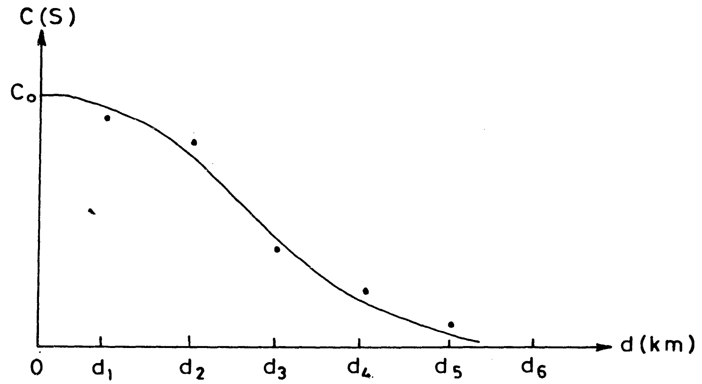
2.33 Kovaryans Değerlerine Bir Fonksiyonun Uydurulması.

Kuşakların ortalama yarıçaplarına karşılık olarak hesaplanan kovaryans değerleri ayrık (disrit) bir dizi oluştururlar. Kuşakların ortalama yarıçaplarından (bağımsız değişken) ve bu yarıçaplara karşılık gelen kovaryans değerlerinden (bağımlı değişken) yararlanılarak standart bir fonksiyonun saptanmasıyla, kovaryans değerlerinde süreklilik sağlanabilir. Söz konusu fonksiyon belirlenirken bazı genel ölçütler konulmalıdır. Bu ölçütler ;

* Seçilecek fonksiyon uzaklığa bağlı olmalıdır. Uzaklık sıfır olduğunda, fonksiyonun değeri C_o varyansına eşit olmalıdır, uzaklık sonsuz olduğunda fonksiyonun değeri sıfıra gitmelidir.

* Kovaryans fonksiyonu olarak seçilecek fonksiyon, benzer fonksiyonlar arasında en küçük ortalama hatayı vermelidir.

Bu ölçütleri en uygun düzeyde gerçekleyen fonksiyonlar kovaryans fonksiyonu olarak seçilebilir. Ayrık değerlere göre belirlenmiş tipik bir kovaryans fonksiyonu Şekil-4'de görülmektedir.



Şekil-4 : Tipik Bir Kovaryans Fonksiyonu.

Bu çalışmada,

$$C(s) = \frac{C_o}{(1 + (\frac{s}{d})^2)} \tag{2.19}$$

biçimindeki Hirvonen'in fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyona ilişkin sayısal parametreler ve ortalama hataları Çizelge-2'de verilmiştir.

Kovaryans Türü	d Parametresi	Varyanslar A_o, B_o, C_o	m_o	Kullanılan Veriler
A	3.095 km	20398.2264	±0.0430	Yükseklik
B	3.291 km	2143.7550	±0.0492	Anomali Yükseklik
C	3.347 km	225.2983	±0.0564	Anomali

Çizelge-2 : Kovaryans Fonksiyonuna İlişkin Sayısal Bilgiler.

A : Yükseklikler arasındaki özkovaryans fonksiyonu,

B : Anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkovaryans fonksiyonu,

C : Anomaliler arasındaki özkovaryans fonksiyonu.

2.4. Gravite Anomalilerinin Prediksiyonu.

Gravite anomalilerinin prediksiyonu için 2.1 altbölümünde özellikleri açıklanan ve Ek-1'de sayısal olarak verilen verilerden yararlanılmıştır. Söz konusu veriler kullanılarak 33 dayanak noktasında 2.2 altbölümünde açıklandığı gibi serbest hava anomalileri hesaplanmıştır. Bu anomaliler temel alınarak, uygulama bölgesindeki 33 adet dayanak noktası sırayla prediksiyon noktası olarak düşünülüp öteki 32 nokta yardımıyla her nokta için $\tilde{\Delta g}_p$ ve m_p hesaplanmıştır.

Genel çizgileriyle bu şekilde verilen prediksiyon işlemi için bazı karşılaştırmalara da olanak verecek biçimde üç model tasarlanmıştır.

1.Model : Bu prediksiyon modelinde, anomaliler (2.2) eşitliğine göre hesaplanmış, kovaryans fonksiyonu içinde (2.19) formülüyle verilen Hirvonen'in fonksiyonu kullanılmıştır. Bu modelde anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkovaryanslar gözönüne alınmamıştır. Bu durumda $\tilde{\Delta g}_p$ ve m_p için çözüm eşitlikleri, (1.14) ve (1.15)'de anomalilerle yükseklikler arasındaki korelasyon gözardı edilerek bulunan,

$$\tilde{\Delta g}_p = \underline{C}^T_{pi}\ \underline{C}^{-1}_{ij}\ \underline{\Delta g}^*_j + E\{\Delta g\} \tag{2.20}$$

ve

$$m^2_p = C_o - \underline{C}^T_{pi}\ \underline{C}^{-1}_{ij}\ \underline{C}_{jp} \tag{2.21}$$

eşitlikleri kullanılmıştır. Bu modele ilişkin sayısal sonuçlar Çizelge-3'de verilmiştir.

2.Model : Bu model birinci modele benzemekle birlikte, (2.2) eşitliğine göre hesaplanan anomaliler (2.10) eşitliğinden yararlanılarak yükseklikten dolayı düzeltilmişlerdir. Düzeltilen anomalilerle (Δg_{FD}) tekrar (2.20) ve (2.21) bağıntılarına göre prediksiyon işlemi yapılmıştır. (2.20) bağıntısından bulunan anomali değerine, yükseklikle ilgili düzeltme terimi (b Δh) ters işaretli olarak eklenmiştir. Yani,

$$\tilde{\Delta g}_{Fi} = \tilde{\Delta g}_{FDi} + 0.105095\ \Delta h_i \tag{2.22}$$

işlemiyle $\tilde{\Delta g}_F$ değerleri bulunmuştur. Sayısal sonuçlar Çizelge-3'de sunulmuştur.

3.Model : Bu model önceki iki modelden de farklıdır. Anomalilerle yükseklikler arasındaki çaprazkovaryanslar gözönüne alınmıştır. Anomaliler yine (2.2) eşitliğine göre hesaplanmış, merkezlendirme işlemi de (2.11) eşitlikleriyle yapılmıştır. Kovaryans fonksiyonu olarak da Hirvonen fonksiyonu kullanılmıştır. $\tilde{\Delta g}_p$ ve m_p 'ler (1.14) ve (1.15) matrisiyel eşitliklerinden hesaplanmıştır. Sayısal sonuçlar Çizelge-3'de sunulmuştur.

2.41 Prediksiyon Modellerinin Karşılaştırılması.

Prediksiyon modellerinin karşılaştırılması için, uygulama bölgesindeki 33 adet dayanak noktası sırayla prediksiyon noktası olarak düşünülüp öteki 32 nokta yardımıyla her noktada $\tilde{\Delta g}_p$ ve m_p değerleri hesaplanmıştır. $\tilde{\Delta g}_p$ büyüklüklerinden yararlanılarak her nokta için,

$$\varepsilon\Delta g_p = \Delta g_p - \tilde{\Delta g}_p \qquad (p=1,2,\dots,33) \tag{2.23}$$

Nok No	Ölçü Δg_F mgal	I.MODEL $\tilde{\Delta g}_F$	Fark	m_p	II.MODEL $\tilde{\Delta g}_F$	Fark	m_p	III.MODEL $\tilde{\Delta g}_F$	Fark	m_p
1	11.9	17.6	-5.7	12.03	11.6	0.3	2.00	14.4	-2.5	1.13
2	14.0	17.6	-3.6	11.2	16.1	-2.1	2.00	5.6	8.4	2.49
3	22.9	21.3	1.6	10.78	25.0	-2.1	1.99	22.6	0.3	1.69
4	21.1	25.0	-3.9	10.81	22.1	-1.0	1.99	23.5	-2.4	1.76
5	23.3	17.0	6.3	11.31	26.2	-2.9	2.00	18.5	4.8	2.08
6	33.0	45.2	-12.2	7.88	35.4	-2.4	1.91	39.9	-6.9	1.69
7	17.7	20.6	-2.9	10.63	18.2	-0.5	1.99	25.3	-7.6	1.78
8	15.8	17.5	-1.7	8.62	15.2	0.6	1.89	22.6	-6.8	1.58
9	14.6	16.0	-1.4	8.39	14.5	0.1	1.89	19.3	-4.7	0.98
10	13.5	19.2	-5.7	11.46	15.3	-1.8	2.00	19.5	-6.0	1.22
11	22.5	26.4	-3.9	13.58	20.5	2.0	2.02	18.9	3.6	0.92
12	28.9	28.6	0.3	12.67	26.4	2.5	2.01	26.2	2.7	0.54
13	48.5	38.0	10.5	13.05	49.6	-1.1	2.02	51.3	-2.8	0.57
14	13.8	22.6	-8.8	13.36	11.8	2.0	2.02	10.1	3.7	0.71
15	18.3	18.6	-0.3	13.27	21.6	-3.3	2.02	16.0	2.3	0.62
16	29.6	34.7	-5.1	12.30	27.4	2.2	2.01	23.7	5.9	1.21
17	9.5	16.9	-7.4	11.21	9.2	0.3	2.00	5.6	3.9	1.94
18	24.6	33.6	-9.0	11.44	23.2	1.4	2.00	28.1	-3.5	0.71
19	50.2	41.0	9.2	12.13	49.9	0.3	2.01	53.3	-3.1	0.64
20	12.4	21.4	-9.0	12.87	8.3	4.1	2.02	11.3	1.1	1.37
21	34.9	37.7	-2.8	12.32	37.0	-2.1	2.01	34.0	0.9	2.15
22	58.6	38.8	19.8	13.31	59.4	-0.8	2.02	62.6	-4.0	1.81
23	59.2	37.6	21.6	9.64	60.6	-1.4	1.96	54.7	4.5	1.97
24	43.1	31.7	11.4	8.66	39.5	3.6	1.93	47.0	-3.9	0.95
25	44.8	46.0	-1.2	11.02	41.5	3.3	1.99	40.6	4.2	0.83
26	35.4	42.8	-7.4	12.35	33.8	1.6	2.01	31.5	3.9	1.45
27	51.4	30.3	21.1	12.08	53.6	-2.2	2.01	55.0	-3.6	0.82
28	26.5	36.1	-9.6	13.18	25.2	1.3	2.02	25.8	0.7	1.40
29	40.6	52.0	-11.4	10.29	40.3	0.3	1.97	33.8	6.8	2.07
30	20.7	24.1	-3.4	10.60	19.1	1.6	1.99	20.6	0.1	1.79
31	24.7	20.3	4.4	10.71	25.1	-0.4	1.99	18.6	6.1	1.59
32	57.4	38.1	19.3	10.77	56.9	0.5	1.97	50.6	6.8	1.75
33	12.2	28.0	-15.8	13.20	15.7	-3.5	2.02	9.6	2.6	0.89

Çizelge-3 : 1., 2. ve 3. Modellere Göre Yapılan Prediksiyonun Sayısal Sonuçları.

eşitliği ile $\varepsilon\Delta g_p$ farkları hesaplanmıştır. Her prediksiyon modeli için hesaplanan $\varepsilon\Delta g_p$ farklar kümesine rasgelelik, çarpıklık, ekses ve χ^2 uyum testleri uygulanmıştır. Sonuçlar Çizelge-4'de toplu olarak sunulmuştur. Yine her prediksiyon noktasında hesaplanan m_p prediksiyon hataları kullanılarak,

$$\bar{m} = E\{m_p\} \qquad (p = 1,2,\ldots,33) \qquad (2.24)$$

eşitliği ile $\bar{m}$ karşılaştırma büyüklükleri hesaplanmıştır.

Prediksiyon Modeli	Umut Değer mgal	Standart Sapma mgal	Min.Değ. Max.Değ. mgal	Rasgelelik Testi	Çarpıklık Testi	χ^2 Uyum Testi	$\bar{m}$ mgal
1.MODEL	-0.203	±9.847	-15.8 +21.6	Rasgele Dağılmıyor	Sağdan Çarpık	Normal Dağılmıyor	11.438 ±1.528
2.MODEL	+0.012	±2.010	-3.5 +4.1	Rasgele Dağılmış	Normal Dağılım	Normal Dağılım	1.990 ±0.036
3.MODEL	+0.470	±4.483	-7.6 +8.4	Rasgele Dağılmış	Normal Dağılım	Normal Dağılım	1.367 ±0.535

Çizelge-4 : Prediksiyon Modellerinin $\varepsilon\Delta g_p$ Farklarına İlişkin İstatistik Bilgiler ve $\bar{m}$ Karşılaştırma Büyüklükleri.

$\varepsilon\Delta g_p$ fark kümelerine uygulanan ve sonuçları Çizelge-4'de verilen istatistik testlerin anlamlılık düzeyi % 95 dir. Çizelge-4'ün incelenmesinden 1.Modele ilişkin $\varepsilon\Delta g_p$ farklar kümesi % 95 olasılıkla rasgele ve normal dağılımda olmadığı, diğer iki modele ilişkin $\varepsilon\Delta g_p$ farklar kümesinin % 95 olasılıkla rasgele ve normal dağılımda olduğu görülmektedir.

Çizelge-4'de sunulan istatistik bilgilere göre, en duyarlı sonucu hangi prediksiyon modeli vermektedir? sorusunun yanıtı iki karşılaştırma büyüklüğüne göre verilebilir. Bunlardan $\varepsilon\Delta g_p$ farklar kümelerinin istatistik parametrelerine göre en duyarlı sonuç 2.modelden elde edilmiştir. $\bar{m}$ karşılaştırma büyüklüğüne göre ise, 3.model en duyarlı sonucu vermektedir.

3. SONUÇ

Yaklaşık 23 km x 22 km boyutlu ve engebeli bir arazide enküçük kareler prediksiyon yöntemiyle 3 değişik modelle yapılan prediksiyon sonunda şu sonuçlara varılmıştır.

* Gravite anomalilerine ilişkin ölçü değerleriyle prediksiyon değerleri arasındaki farklar ölçüt alındığında, anomalilerle yükseklikler arasındaki korelasyonun matematik bir eşitlikle giderildiği prediksiyon modeli en duyarlı sonucu vermiştir.

* Modellerin karşılaştırılmasında ölçüt olarak prediksiyon hataları gözönüne alındığında, anomalilerle yükseklikler arasındaki korelasyonun çaprazkovaryanslar kanalıyla prediksiyon eşitliklerine sokulmasından elde edilen model en duyarlı sonucu vermiştir.

* İlk iki model formülasyon ve sayısal çözümlemeler açısından üçüncü modele göre daha yalın görünmektedir. Zira üçüncü modelde anomalilerin yükseklikle olan korelasyonu çaprazkovaryanslar biçiminde modelin içine sokulmuştur. Bu da üçüncü modelin daha karmaşık olmasına neden olmaktadır.

* Üçüncü modelin olumsuz yanları vardır. Şöyleki, prediksiyon eşitliklerinde prediksiyon noktasının yüksekliğine gereksinim vardır. Bu da prediksiyon noktasının yüksekliğinin herhangi bir yöntemle belirlenmesini zorunlu kılmaktadır. Buradaki herhangi bir yöntem, geleneksel yükseklik belirleme yöntemleri (nivelman, vb.) olabileceği gibi prediksiyon yöntemi de olabilir. Bundan başka üçüncü modelin olumsuz bir yanı da, sayısal çözümlemeler sırasında büyük boyutlu matris ve vektörlerin kullanılmasıdır ki bu da bilgisayar programlarında boyut sorunu yaratabilir.

* Sayısal çözümlemeler sonucunda prediksiyon modellerine ilişkin belirlenen doğruluklar tek bir veri sıklığına, tek bir kovaryans fonksiyonuna (Hirvonen fonksiyonu) ve tek bir merkezlendirme fonksiyonuna (trend fonksiyonu) göredir. Prediksiyon sonuçlarının veri sıklığı ile, kovaryans fonksiyonuyla ve merkezlendirme fonksiyonuyla ilişkileri ayrı ayrı araştırma konuları olup ayrıca araştırılmalıdır.

/16/ Tscherning, C.C. : Application of Collocation for the Planing of Gravity Surveys, Bull.Geod.No: 116,s.183-198, 1975

/17/ Ulsoy, E. : Yeni Dengeleme ve Prediksiyon Yöntemleri, HKM Dergisi, sayı : 31-32, 1974, Ankara.

/18/ Yerci, M. : Matematik İstatistik Ders Notları, KDMMA, 1976, Konya.

/19/ Wolf, H. : Kollokation mit Hilfe des Gausschen Algorithmus, ZfV 1979/1,s.13-19, 1979.

/20/ Wolf, H. : Multiquadrische Methode und Kollokation, AVN, 1981/3, s.89-95.