BÖLGESEL(ZONAL) HARMONİK KATSIYALARININ YAPAY UYDU YÖRÜNGE PARAMETRELERİ İLE BELİRLENMESİ

Y.Müh. Burhan C. IŞIK

1. GİRİŞ

Temel Geodezik parametrelerden olan bölgesel (zonal) harmonik katsayı - larının belirlenebilmesi, ilk olarak yerçekimi potansiyelinin gösterilmesi ile olanaklıdır. Bu da, homogen küre potansiyelini veren eşitliğin küresel hormonik serilerine açımasıyla olur. Ancak gravite ölçü değerleri yeryüzünde yeteri sıklıkta olmadığı için, bu belirleme yapay uydu gözlemlerinden yapılmaktadır.

Birçok uydu gözlemlerinden elde edilen yörünge parametreleri değişim oranları en küçük kareler yöntemine göre dengelendikten sonra j_n terimlerinden oluşan denklem sistemleri oluşturulur. Gözlemler için seçilen uydunun yörünge elemanları verileri Smithsonian Astrophysical Observatory gibi enstitülerce yayınlanır.

Uluslararası Jeodezi ve Jeofizik Birliğinin 1979 da Canberra' da yaptığı genel kurul toplantısında, bölgesel harmonik katsayılarının son değerleri, özel çalışma grubunun hesaplamalarıyla :

$$J_2 = (108263 \pm 0.5)\ 10^{-8}$$

$$J_3 = (-254 \pm 1)\ 10^{-8}$$

$$J_4 = (-162 \pm 1)\ 10^{-8}$$

$$J_5 = (-23 \pm 1)\ 10^{-8}$$

$$J_6 = (55 \pm 1)\ 10^{-8}$$

olarak kabul edilmiştir, /5/

Bu yazıda yukarıdaki katsayıların belirlenmesine esas olan bağıntılar derlenerek sunulmuştur.

2. YERÇEKİMİ POTANSİYELİ

Bir uzay kitlesinin potansiyeli k, Newton çekim sabitesi, r, kütleler arası uzaklık, ρ, yoğunluk, dv, hacim elemanı olmak üzere

$$V = k \iiint_v \frac{\rho}{r} \, dv \qquad (1)$$

ile verilir. Atmosfer ve merkezkaç kuvveti etkilerinin olmadığı varsayılarak, Yeryüzünün potansiyeli ise,

$$V = \frac{k\,M}{r} \qquad (2)$$

homogen bir küre potansiyeli gibi düşünülebilir. Burada M, bütünü küre merkezinde toplanmış düşünülen kitledir. $\Delta V = 0$ Laplace eşitliğindeki V fonksiyonu da " Harmonik " bir fonksiyon olur.

1, θ, λ kutupsal koordinatları ile yazılan

$$\begin{aligned} f_n(x,y,z) &= 1^n \; f_n\,(\sin\theta\cos\lambda\,,\; \sin\theta\sin\lambda\,,\; \cos\theta) \\ &= 1^n\; Y_n\;(\theta,\lambda) \end{aligned}$$

ifadesinde , $Y_n\,(\theta,\lambda)$, n. dereceden Laplace küre yüzeyi fonksiyonudur. Ve Laplace denkleminin çözümünden,

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=o}^{n} \left[(a_{nm}\, P_n^m\,(\cos\theta)\,\cos m\lambda + b_{nm}\, P_n^m\,(\cos\theta)\,\sin m\lambda\,) \right] \qquad (4)$$

elde edilir, /4/ . Formülde geçen P_n^m $(\cos\theta)$ ya "Legendre Küresel Fonksi - yonları" denir, a_{nm} ve b_{nm} harmonik katsayılardır. $m = 0$ için Legendre küresel fonksiyonları, küre kuşağı harmonik fonksiyonlarına(zonal harmonik fonksiyonlar) dönüşür. $u = \cos\theta$ olmak üzere P_{no} (u) ya Legendre polinomları da denir ve

$$P_n(u) = P_{no}(u) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \tag{5}$$

Rodrigues bağıntısı ile belirlenir.

Yeryüzünün yoğunluk farklılıkları kesin olarak bilinmediğinden (1) potansiyel ifadesinin seri açınımına gereksinme duyulur. Sonuçta

$$V = \frac{kM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=o}^{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \right] \tag{6}$$

elde edilir. Formülde geçen a, Yeryüzü elipsoidinin yarı ekseni, C_{nm} ve S_{nm} kütle integrallerini içeren harmonik katsayılardır. Genel olarak uydu Geodezide bu katsayılar,

$$J_n = -C_n \quad , \quad J_{nm} = -C_{nm} \quad , \quad K_{nm} = -S_{nm}$$

şeklindedir, /3/ . Bu katsayıların Δ g ivme sapmalarına göre belirlenmesi için yeterli sıklıkta ölçümlerin tamamlanmış olması gerekir ki, henüz tamamlanmamıştır. Bu nedenle Dünya çevresinde yörüngeye sokulmuş yapay uydulara yapılan gözlemlerden yararlanarak, katsayılar saptanmaktadır. Yalnız Dünya basıklığının uydu üzerindeki etkisini dikkate almak gerekir. Bu etki, yörünge düzleminin Dünya ekseni etrafında yavaş bir hareketde bulunması ile kendini gösterir. O zaman genel çekim potansiyeli (6) formülü ile değil

$$V = \frac{k\,M}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos\theta) - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n (J_{nm}\cos m\lambda \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + K_{nm}\sin m\lambda).\ P_{nm}(\cos\theta)\right] \qquad (7)$$

ile verilir, /1/. Burada J_n ler bölgesel harmonikleri J_{nm} ve K_{nm} ler göze (tesseral) harmonikleri göstermektedir. Göze harmonikler çabuk işaret değiş - tiren salınım bozukluklarına sebep olur, halbuki bölgesel harmonikler kümülatiftir, /2/, yani çekim potansiyeline bölgesel harmoniklerin etkisi göze harmoniklerden daha fazladır. Bu yüzden J_{nm} ve K_{nm} terimleri işleme sokulma - yarak bozucu potansiyel

$$R = -\frac{k\ M}{a_e}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} J_n\ P_n\ (\cos\theta) \qquad (8)$$

ile gösterilir. R, görüldüğü gibi r ve θ ya bağlı bir fonksiyondur. Formülde geçen a_e , yeryüzünün ekvatoral yarıçapıdır. O halde yeryüzünün çekim potansiyeli (7) ve (8) den kısaca

$$V = \frac{k\ M}{r} + R \qquad (9)$$

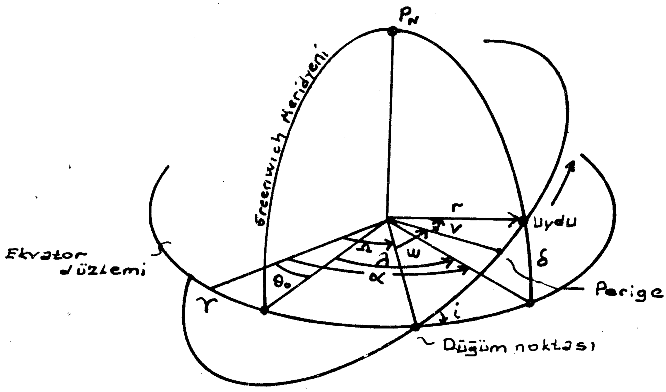
ile gösterilir.

3. YÖRÜNGE ELEMANLARININ DEĞİŞİMİ

Uzaya fırlatılan bir uydunun

Ω=Düğüm noktasının rektasansiyonu
v=Uydunun gerçek anomalisi
ω=Perige noktasının argümenti
i=Eğim
a=Yörüngenin büyük yarı ekseni
e=Yörüngenin dış merkezliği

olmak üzere 6 parametresi vardır. (Şekil-1)



Şekil :1 - Uydunun yörünge parametreleri.

Yeryüzünün kitle dağılımındaki düzensizlikler, ay ve güneş çekimleri , radyasyon basıncı ve atmosfer direnci gibi etkilerle uydu yörüngesi, yeri sabit bir elips olmayıp, bu kuvvetler nedeniyle hareket eden bir yörüngedir. S, yarıçap doğrultusundaki , T ise S ve W ye dik doğrultudaki toplam bozucu kuvvetlerin dik bileşenleri olmak üzere, yörünge elemanlarındaki değişim, Lagrange bağıntıları denen

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{b}\sqrt{\frac{a}{kM}}\left(e\;S\;\sin v + \frac{p}{r}\;T\right)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{kM}}\left[S\;\sin v + \left(\frac{r+p}{p}\;\cos v + e\;r/p\right)T\right]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{b}\sqrt{\frac{a}{kM}}\;W\cos(\omega+v) \qquad (10)$$

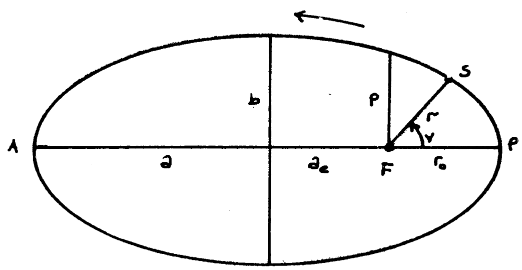
$$\frac{d\,\Omega}{d\,t} = \frac{r}{b}\sqrt{\frac{a}{k\,M}}\,W\,\frac{\sin\,(\,\omega\,+v)}{\sin\ i}$$

$$\frac{d\,\omega}{d\,t} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{k\,M}}\left[\,-\frac{1}{e}\quad S\,\cos\,v+\frac{r+p}{e\,p}\,T\,\sin\,v-\frac{r}{p}\,W\,\sin\,(\omega+v)\cot\,i\,\right]$$

bağıntıları ile verilir, /2/. Burada p, $v = 90^{o}$ için yarıçap vektörünün uzunluğudur ve

$$p = \frac{b^2}{a} = a\,(\,1 - e^2) \tag{11}$$

ye eşittir. (Şekil:2)



Şekil :2

Şekil:2- A =Apoge

p =Perige

F =Yeryüzü kitle merkezi

S =Uydunun herhangi bir andaki konumu

S, yarıçap vektörü boyunca bozucu kuvvetin bileşeni olduğuna göre

$$S=\frac{\partial R}{\partial r} \tag{12}$$

yazabiliriz. Meridyen ve birinci düşey boyunca bozucu kuvvetlerin bileşkeleri

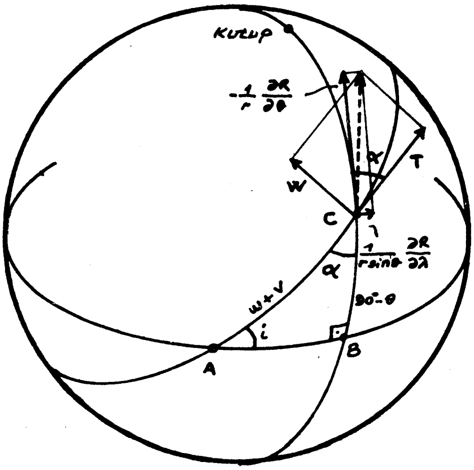
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial \lambda}$$

dır. Bunlara göre T ve W bileşenleri

$$T=-\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta}\operatorname{Cos}\alpha+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\sin\alpha$$

$$W=-\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta}\sin\alpha-\frac{1}{r\sin}\frac{\partial R}{\partial \lambda}\cos\alpha \tag{13}$$

olarak elde edilir. (şekil : 3



Şekil : 3 Bozucu kuvvetlerin bileşkeleri

A =Düğüm noktası

C =Uydu

ABC küresel dik üçgeninden,

$$\cos\alpha = \frac{\cos(\omega + v)\ \sin i}{\sin\theta}, \qquad \sin\alpha = \frac{\cos i}{\sin\theta} \tag{14}$$

olduğu görülür, sonuç olarak

$$T = -\frac{\cos(\omega+v)\sin i}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\theta} + \frac{\cos i}{r\sin^2\theta}\frac{\partial R}{\partial\lambda} \tag{15}$$

$$W = -\frac{\cos i}{r\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{\cos(\omega+v)\ \sin i}{r\sin^2\theta}\frac{\partial R}{\partial\lambda} \tag{16}$$

elde edilir.

Çekim potansiyelinin bölgesel terimleri seküler ve uzun peryodlu sapmalara neden olur, halbuki göze harmonikler boylama bağlı olması nedeniyle yalnızca kısa peryodlu sapmaların artımını verir. Yörünge elemanlarının değişimleri ve bölgesel harmonik katsayıları arasındaki ilişkiyi elde etmek için, daha önce de belirtildiği gibi, bozucu potansiyelin küresel harmoniklere açınımında bölgesel olmayan terimler işlemden çıkarılır ve R, (8) ile verilir, yani, $\partial R/\partial\lambda = 0$ dır.

(8) in r ve θ ya göre diferansiyeli alınıp, S,T,W bileşenleri (12) , (15) ve (16) dan hesaplanarak (10) sistemine eklenirse yörünge elemanlarının da/dt, de/dt ..... değişim oranları, J_2, J_3, J_4..... katsayıları cinsinden gösterilebilir.

4. "J_n" BÖLGESEL HARMONİK KATSAYILARININ BELİRLENMESİ

Yörünge elemanlarının değişim oranları direkt olarak gözlenemez ancak uydunun birkaç dönüşünden sonra gözlenebilir. Bir dönüşten sonra p peryodu ile

$$\Delta a = \int_{t_o}^{t_o+p} \frac{da}{dt}\, dt \;, \quad \Delta e = \int_{t_o}^{t_o+p} \frac{de}{dt}\, dt \;, \quad \Delta i = \int_{t_o}^{t_o+p} \frac{di}{dt}\, dt \quad \text{vs} \qquad (17)$$

olur. t_o, keyfi bir andır. Bu integrallerin çözümü için da/dt , de/dt ... değişim oranlarını bağımsız bir değişkenle ifade etmek gerekir. Bu bağımsız değişken için, t zamanı veya v gerçek anomali seçilebilir.

İkinci olasılık göz önüne alınarak, (Şekil-3) deki ABC küresel dik üç - geninden θ, kutupsal uzaklığı, v nin bir fonksiyonu olarak,

$$\cos\theta = \sin(\omega + v)\ \sin i \qquad (18)$$

şeklinde gösterilebilir. Ayrıca r yarıçap vektörü v cinsinden,

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

ye eşittir ki, buradaki p, (11) den

$$P = a\,(1 - e^2)$$

dir. Kepler'in ikinci kanunundan v ve t zamanı arasındaki ilişki ise,

$$\frac{dt}{dv} = \frac{r^2}{\sqrt{k\ M\ a\,(1 - e^2)}}$$

ile verilir. İntegralin sınırları değişken dönüştürmesi ile t yerine v alınarak, örneğin ;

$$\Delta a = \int_{t=t_o}^{t_o+p} \frac{da}{dt}\, dt = \int_{v_o}^{2\Pi} (da/dv)\, dv \qquad (21)$$

yazılabilir. Burada da/dv oranı ise,

$$da/dv = \frac{da}{dt} \quad \frac{dt}{dv}$$

şeklinde gösterilerek,

$$da/dv = \frac{r^2}{\sqrt{k\ M\ a\ (1-e^2)}} \quad \frac{da}{dt} \tag{22}$$

elde edilir. Diğer yörünge elemanları için benzer yoldan uzun fakat zor ol - mayan işlemlerden sonra

$$\Delta a = 0$$

$$\Delta e = -\frac{1-e^2}{e} \tan i.\ \Delta i$$

$$\Delta i = 3\pi e\left(\frac{a_e}{p}\right)^3\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\cos i \quad \cos\omega J_3 + \frac{45}{16}\pi\, e\left(\frac{a_e}{p}\right)^4\left(1-\frac{7}{6}\sin^2 i\right).$$

$$.\sin 2i \sin 2\omega . e\ J_4 \ldots\ldots.$$

$$\Delta\Omega = -3\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\cos i\ J_2 + 3\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^3\left(1-\frac{15}{4}\sin^2 i\right)\cot i \sin\omega . e\ J_3$$

$$+\frac{15}{2}\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^4\left(1-\frac{7}{4}\sin^2 i\right)\cos i \quad J_4 \ldots$$

$$\Delta w = 6\eta\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)J_2 + 3\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^3\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\sin i \ldots$$

$$\ldots \sin\omega . e\ J_3 - 15\pi\left(\frac{a_e}{p}\right)^4\left[\left(1-\frac{31}{8}\sin^2 i+\frac{49}{16}\sin^4 i\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{7}{16}\sin^2 i\right).\right.$$

$$\left.\ldots \sin^2 i \quad \cos 2w\right] J_4 \ldots\ldots \tag{23}$$

denklemleri elde edilir, /2/. Ω ve ω bir peryod aralığında çok yavaş değişen seküler sapmalara neden olur. $i < 90^o$ için Ω zamanla azalır. ω daki değişme yörünge düzlemi içersinde yörünge elipsinin dönmesi ile eşdeğerlidir. Bu dönme i, e ve p de uzun peryodlu sapmalar yapar, çünkü bunlar ω yi içerirler ($\cos \omega$, $\sin \omega$ veya $\sin 2\omega$). Tipik bir ω peryodu 2 aydır. Çift katsayılar, Ω ve ω daki sapmalardan, tek katsayılar, i ve e sapmalarından elde edilir.

(23) denklemlerinden ilki yörüngenin büyük ekseninin seküler veya uzun peryodlu olarak değişmeyeceğini gösterir. Harmonik katsayıları i, yörünge eğimine, e dış merkezliğine ve a büyük yarı eksenine bağlıdır. Yani bu denklemler J_2, J_3, J_4.... e göre lineerdir. Lineer olmayan J_2^2, J_2J_3, J_2J_4.. vs. terimlerini de hesaba katmak gerekir. (23) denklemleri bazı lineer olmayan terimlerle, J_2, J_3, J_4 .... vs katsayılarını belirtmek için kullanılabilir. Seküler ve uzun peryodlu değişimler $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, Δe, Δi yeter çoklukta uydu gözlemlerinden bilinir, yani, J_2, J_3, J_4 .. e göre çözülebilen

$$
\begin{aligned}
a_2J_2 + a_3J_3 + a_4J_4 + \ldots\ldots + a_{22}J_2^2 + a_{23}J_2J_3 + \ldots &= A \\
b_2J_2 + b_3J_3 + b_4J_4 + \ldots\ldots + b_{22}J_2^2 + b_{23}J_2J_3 + \ldots &= B
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

şeklinde sayısı sonsuz olabilen denklemler elde edilir. Belli bir n_o sayısından büyük n için J_n ler ihmal edilebilir. a, e, i parametreleri aynı olmayan uyduları kullanmak, denklemleri elde etmek bakımından önemlidir.

J_2 ve J_4 .. çift harmonikleri $\Delta\Omega$ düğüm noktası gerilemesinden ve $\Delta\omega$ perige dönmesinden ifade edilebilir. (23) ün analizinden, bu görünür. Çift harmonikler Ω ve ω nın seküler bozuculuğuna sebep olur ki küçük bir büyüklük olan e dış merkezliği ile çarpılan J_3, J_5 .. tek katsayılarının uzun peryodlu etkisinden daha büyüktür.

Diğer taraftan Δe ve Δi de J_3, J_5 ... tek katsayılarının etkisi çift katsayılarınınkinden daha fazladır. Bu yüzden tek katsayılar Δe ve Δi den veya r_o = FP perige uzaklığının değişiminden tanımlanır.(Şekil:2) Çünkü r_o $v = 0$ için yarıçap vektördür. (11) ve (19) dan

$$r_o = \frac{P}{1 + e} = a (1 - e) \tag{25}$$

elde edilir ve $\Delta a = 0$ olduğu için $\Delta r_o = - a \Delta e$ dır. Böylece perige uzaklığı dış merkezliğin değişimi ile orantılı olur ve Δe nin yerine kullanılabilir.

$\Delta \Omega$, yeryüzünün basıklık fonksiyonudur ve J_n terimleri ile ifade edilebilir. f basıklığı için ortalama değer ; q , ekvatorda merkezkaç kuvveti ve çekim ivmelerinin bileşkesi olmak üzere

$$f = \frac{q}{2} (1 - f) + \frac{3}{2} J_2 + \frac{5}{8} J_4 \tag{26}$$

ile verilir.

YARARLANILAN KAYNAKLAR :

/1/ Erbudak M. - Tuğluoğlu A. : Fiziksel Geodezi 1974 - İSTANBUL

/2/ Haiskanen W.A - Moritz H. : Physical Geodesy 1967 - SAN FRANCISCO ve LONDON

/3/ Torge W. : Geodesy 1980 - BERLİN

/4/ Tuğluoğlu A : Potansiyel Teorisi - İSTANBUL

/5/ TUJJB Bülteni sayı :13 1981