BİLİNMİYENLİ KOŞULLU ÖLÇÜLER DENGELEMESİNİN ENDİREKT ÖLÇÜLER DENGELEMESİNE DÖNÜŞÜMÜ

Muzaffer ŞERBETÇİ

1. GİRİŞ

Dengeleme hesabında "Bilinmiyenli Koşullu Ölçüler dengelemesi" türü bilindiği gibi gereğinden fazla sayıdaki ölçülerin arasında yazılan koşullarda x,y,z,. gibi bazı parametrelerin (bilinmiyenlerin) birlikte hesaplanmasını öngörür.

Dengeleyici fonksiyonlarda olduğu gibi ölçü hataları ile yüklü verilen koordinatların dengelenmesinin yanı sıra fonksiyon parametrelerinin de hesaplanması gerekmektedir. Bu tür problemler daha çok Dengeleyici fonksiyonlar, Helmert dönüşümü v.b. gibi koordinatların ölçü olarak girdiği ve model gereği bazı bilinmiyenlerin de birlikte hesaplanması gereken durumlarda karşılaşılır.

Bu problemlerin klasik çözümlerinde sistemin tümüne ait (9) nolu normal denklemler kurularak bu denklemlerin çözümü ile bilinmiyenler ve (k) korelatları, bu korelatlardan yararlanarak da düzeltmelerin hesaplanması yolu izlenir.

Aşağıda bu yolun dışında bu dengeleme problemlerinin "Korelasyonlu endirekt ölçüler dengelemesi" şekline dönüştürülerek daha kolay bir yoldan aynı sonuçların bulunabileceği gösterilmiştir.

2. BİLİNMİYENLİ KOŞULLU ÖLÇÜLER DENGELEMESİ

L_i = Ölçüler $(i = 1,2,\ldots,n)$

v_i = Ölçülere getirilecek düzeltmeler .

p_i = Ölçülerin ağırlıkları

x,y,z,.. = u adet bilinmiyen

ise, ölçülerin dengelendikten sonra bilinmiyenlerle aralarında

$$F_j\ (L_1 + v_1,\ L_2 + v_2, \ldots\ldots, L_n + v_n,\ x,\ y,\ z,\ldots.) = 0 \qquad (1)$$

koşullarının sağlanması gerekiyorsa (j =1,2,..r) bu durumda "Bilinmiyenli koşullu ölçüler dengelemesi" söz konusudur./3/,/5/. Bu tür dengelemede bilindiği gibi her koşul denkleminde hem ölçüler hem de bilinmiyenler geçmektedir. Dengeleme yapılabilmesi için

$$n > r > u$$

olmalıdır. Koşul denklemlerinin Taylor'a göre doğrusallaştırılması amacı ile

$$\begin{aligned} x &= x_o + dx \\ y &= y_o + dy \\ z &= z_o + dz \end{aligned} \tag{2}$$

x_o, y_o, z_o yaklaşık değerleri herhangibir yöntemle hesaplanırsa (1) denklemleri

$$\begin{aligned} &a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n + A_1dx + B_1dy + C_1dz + \dots + w_1 = 0 \\ &b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \dots + b_nv_n + A_2dx + B_2dy + C_2dz + \dots + w_2 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \dots + r_nv_n + A_rdx + B_rdy + C_rdz + \dots + w_r = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

burada $a_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial L_i}$, $b_i = \dfrac{dF_2}{\partial L_i}$, ... $r_i = \dfrac{\partial F_r}{\partial L_i}$

$$A_j = \left(\frac{dF_j}{\partial x}\right)_o \qquad B_j = \left(\frac{\partial F_j}{\partial y}\right)_o \qquad C_j = \left(\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)_o$$

ve

$$w_j = F_j\,(L_1\,,\,L_2\,,\dots,L_n,\,x_o,y_o,z_o,\dots)$$

dır. (3) denklemleri matris gösterimi ile

$$A\,v + B\,x + w = 0 \tag{4}$$

yazılabilir. Burada

$$A_{r,n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \dots & a_n \\ b_1 & b_2 \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 \dots & r_n \end{bmatrix} \qquad B_{r,u} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \dots \\ A_2 & B_2 & C_2 \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_r & B_r & C_r \dots \end{bmatrix} \qquad w_{r,1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}$$

$$v_{n,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad x_{u,1} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad P_{n,n} = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Matrıs ve vektörlerin altlarında yazılan harfler satır ve sütun sayısını göstermektedir.

Dengelemenin ana ilkesi $[pvv]$ = Minimum veya matris gösterimi ile

$$F = v^T P\, v = \text{minimum} \qquad (5)$$

dan yararlanarak Normal denklemlerin kurulmasına geçilir. Bunun için (4) denklemi $-2k^T$ ile soldan çarpılarak (5) fonksiyonuna ilave edilir. Burada k, korelat=Lagrange çarpanı vektörü olup

$$k^T_{1,r} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{bmatrix}$$

dır.

$$F = v^T P\, v - 2k^T(A\, v + B\, x + w) = \text{minimum} \qquad (6)$$

Bu denklemde son terimin değeri sıfır olduğundan F fonksiyonunun değeri değişmemiştir. Bu fonksiyonun minunun olması için v ve x değişkenlerine göre diferansiyelleri alınarak

$$dF = dv^T P v + v^T P dv - 2k^T A dv = 0^T dv$$

veya düzenlenerek kısaltılırsa: ($dv^T Pv = v^T Pdv$ olduğundan)

$$v^T P = k^T A$$

iki tarafın evriği (tarnspozesi) alınarak

$$Pv = A^T k$$

veya

$$v = P^{-1} A\, k \qquad (7)$$

(6) nolu fonksiyonunun x değişkenine göre diferansiyeli ise

$$dF = -2k^T B dx = o^T dx$$

veya

$$B^T k = o \qquad (8)$$

(7) denklemi (4) te yerine konarak (8) in de dikkate alınması ile

$$A P^{-1} A^T\, k + B\, x + w = o \qquad (9a)$$

$$B^T\, k = o \qquad (9b)$$

(r+u) boyutunda Normal denklemler elde edilir. Bu denklemlerin herhangibir yöntemde çözümü ile k ve x vektörleri bulunur.

Düzeltmeler (7) formülü ile hesaplanır. x vektörü (2) denkleminde yerine konularak bilinmiyenlerin kesin değeri hesaplanır.

3. ENDİREKT ÖLÇÜLER DENGELEMESİ ŞEKLİNE DÖNÜŞÜM

Pratikte bu yolun izlenmesi yerine (4) denkleminde

$$-A\, v = \bar{v} \tag{10}$$

konularak

$$\bar{v} = B\, x + w \tag{11}$$

şeklinde endirekt ölçüler dengelemesi yolu izlenir. Ancak ölçüler (10) formülü ile tanımlanan bir işlemden geçtiğinde (11) ile gösterilen düzeltme denklemlerinden normal denklemlere geçerken ortaya çıkan cebrik korelasyonun da dikkate alınması gerekir./4/.

Bu korelasyon matrisi

$$Q_\ell = AP^{-1}A^T \tag{12}$$

veya ağırlık matrisi olarak

$$\bar{P} = Q_\ell^{-1} = (AP^{-1}A^T)^{-1} \tag{13}$$

dir. (11) düzeltme denklemlerinden kurulacak normal denklemler (13) ün de dikkate alınması ile

$$B^T\bar{P}Bx + B^T\bar{P}w = 0 \tag{14}$$

şeklindedir. Bu normal denklemler ise (9) formüllerinde k vektörünün yok edilmesi ile aynı olduğundan buradan bulunacak x vektörü de (9) denklemlerinden bulunacak değerlerle aynıdır. Bilinmiyen vektörünün (11) de yerine konması ile $\bar{v}$ fonksiyon düzeltmeleri hesaplanır. Orjinal ölçülere getirilecek v düzeltmeleri için

(9a) ve (11) in karşılaştırılması ile bulunacak

$$\bar{v} = -\,AP^{-1}A^Tk \tag{15}$$

değerinden k çekilerek (7) de yerine konulursa

$$v = -\,P^{-1}A^T(AP^{-1}A^T)^{-1}\bar{v}$$

veya

$$v = -\,P^{-1}A^T\bar{P}\bar{v} \tag{16}$$

bulunur. Ayrıca

$$[pvv] = [\bar{p}\bar{v}\bar{v}]$$

dır. Bunu görmek için (7) nin dikkate alınması ile

$$[pvv] = v^TPv = (P^{-1}A^Tk)^TPP^{-1}A^Tk = k^T\bar{P}^{-1}k$$

ve (15) in dikkate alınması ile

$$[\bar{p}\bar{v}\bar{v}] = \bar{v}^T\bar{P}\bar{v} = (-AP^{-1}A^Tk)^T\bar{P}(-AP^{-1}A^Tk)$$

ve (13) gözönünde bulundurularak

$$\bar{v}^T\bar{P}\bar{v} = k^T\bar{P}^{-1}\bar{P}\bar{P}^{-1}k = k^T\bar{P}^{-1}k$$

bulunarak yukardaki sav kanıtlanmış olur.

Ağırlığı p=1 olan (birim ağırlıklı) bir ölçünün karesel ortalama hatası ise

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{r-u}} = \sqrt{\frac{[\bar{p}\bar{v}\bar{v}]}{r-u}}$$

dur. Bilinmiyenlerin ortalama hatalarını bulmak için

$$Q_x = (B^T\bar{P}B)^{-1}$$

olarak tanımlanan matris hesaplanır. Bu matrisin köşegen terimleri Q_{xx}, Q_{yy}, $Q_{zz}, \ldots$ ile

$$m_x = m_o\sqrt{Q_{xx}}\ , \quad m_y = m_o\sqrt{Q_{yy}}\ , \quad m_z = m_o\sqrt{Q_{zz}}$$

elde edilir.

(13) ile tanımlanan $Q_\ell = AP^{-1}A^T$ korelasyon matrisi bazı uygulamalarda birim veya köşegen matrisi şeklindedir./6/. Bu gibi durumlarda bilinmiyenli koşullu ölçüler dengelemesi şeklinin yukarda gösterildiği gibi endirekt ölçüler dengelemesi şeklinde yapılması büyük ölçüde zaman ve emek kazandırır.

4. SONUÇ

Klasik yoldan nxn boyutlu bir normal denklem sistemi çözme yerine uxu boyutlu (u<n) bir normal denklemin çözümü ile de aynı sonuçların bulunabileceğinin gösterildiği bu yol, sonuçlara daha çabuk ulaşılması yönünden yeğlenebilir.

Böylelikle konform bir dönüşüm olan Helmert dönüşümünde (12) nolu formülle tanımlanan korelasyon matrisinin skalar bir büyüklük olmasından dolayı sadece bir sistemdeki koordinatların hatalı alınması ile yapılan Endirekt ölçüler dengelemesi sonuçlarının, bilinmiyenli koşullu ölçüler dengelemesi sonuçları ile aynı olması gerektiği sonucu da ortaya çıkmış olur.

5. ÖRNEK

i	x_i	y_i
1	-3,25	11,50
2	-2,30	8,85
3	0,10	5,12
4	3,15	1,80
5	7,20	1,45
6	10,35	4,00
7	14,20	10,55

şeklinde 7 noktaya ait koordinatlar verilmiştir. Bu her iki koordinat değerlerinin hatalı olduğu düşünülerek ikinci dereceden dengeleyici bir eğrinin parametreleri hesaplanacaktır./1/,/2/.

$$y = ax^2 + bx + c$$

parabol denklemi doğrusallaştırılırsa

$$y_i + v_{y_i} = (2a_o x_i + b_o)v_{x_i} + x_i^2 da + x_i db + dc + x_i^2 a_o + x_i b_o + c_o$$

elde edilir. Bu denklemde

$$(2a_o x_i + b_o)\, v_{x_i} - v_{y_i} = -\bar{v}_i$$

konularak düzenlenirse

$$\bar{v}_i = x_i^2 da + x_i db + dc + w_i$$

elde edilir. Burada

$$w_i = x_i^2 a_o + x_i b_o + c_o - y_i$$

dir. Görüldüğü gibi yukardaki düzeltme denklemleri yerine

$$\bar{v}_i = x_i^2 a + x_i b + c - y_i$$

şeklindeki düzeltme denklemleri de aynı sonucu verirler. (4) deki A matrisi için v_{x_i} ve v_{y_i} düzeltmelerin katsayılarından yararlanılır.

$$A = \begin{bmatrix} 2a_o x_1 + b_o & & & & -1 & & & \\ & 2a_o x_2 + b_o & & & & -1 & & \\ & & \cdots\cdots & & & & \ddots & \\ & & & 2a_o x_7 + b_o & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin nümerik olarak hesaplanabilmesi için a,b,c parametrelerinin yaklaşık değerlerinin bilinmesi gerekir. Bunun için Parabol denkleminde üç noktanın koordinatının (burada 2,5 ve 7 numaralı noktalar) yerine konularak

$$a_o = 0,126 \qquad b_o = -1,396 \qquad c_o = 4,972$$

bulunmuştur. Şu halde ölçülerin ağırlıkları $p_i = 1$ alınması ile

$$AA^T = \bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 5,906 & & & & & & \\ & 4,905 & & & & & \\ & & 2,880 & & & & \\ & & & 1,362 & & & \\ & & & & 1,175 & & \\ & & & & & 2,469 & \\ & & & & & & 5,761 \end{bmatrix}$$

ve bu matrisin inversi ile

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0,169 & & & & & & \\ & 0,204 & & & & & \\ & & 0,347 & & & & \\ & & & 0,734 & & & \\ & & & & 0,851 & & \\ & & & & & 0,405 & \\ & & & & & & 0,174 \end{bmatrix}$$

bulunur. B matrisi için

$$B = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_7^2 & x_7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \quad W = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -y_7 \end{bmatrix}$$

nümerik olarak

$$B = \begin{bmatrix} 10,5625 & -3,25 & +1 \\ 5,2900 & -2,30 & +1 \\ 0,0100 & 0,10 & +1 \\ 9,9225 & 3,15 & +1 \\ 51,8400 & 7,20 & +1 \\ 107,1225 & 10,35 & +1 \\ 201,6400 & 14,20 & +1 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} -11,50 \\ -\ 8,85 \\ -\ 5,12 \\ -\ 1,80 \\ -\ 1,45 \\ -\ 4,00 \\ -10,55 \end{bmatrix}$$

Normal denklemler (14) den

$$\begin{bmatrix} 14105,8750 & 1279,5355 & 132,7366 \\ 1279,5355 & 132,7366 & 14,1181 \\ 132,7366 & 14,1181 & 2,8840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 650,8631 \\ 45,5890 \\ 11,5364 \end{bmatrix}$$

Bu denklemlerin çözümü ile

$$a = 0,1291 \qquad b = -\ 1,4488 \qquad c = 5,1511$$

bulunarak dengeleyici parabol için

$$y = 0,1291\ x^2 - 1,1488\ x + 5,1511$$

elde edilir.

Fonksiyon düzeltmeleri için (11) den

$$\bar{v}_1 = -0,277 \qquad \bar{v}_5 = -0,038$$
$$\bar{v}_2 = +0,316 \qquad \bar{v}_6 = -0,016$$
$$\bar{v}_3 = -0,112 \qquad \bar{v}_7 = +0,057$$
$$\bar{v}_4 = +0,068$$

Orjinal ölçülerin düzeltmesi ise (16) dan

v_{x_i}	v_{y_i}
-0,10	-0,05
0,13	0,06
-0,05	-0,04
0,03	0,05
0,01	-0,03
0,01	-0,01
-0,02	0,01

$x_i + v_{x_i}$	$y_i + v_{y_i}$
-3,35	11,45
-2,17	8,91
0,05	5,08
3,18	1,85
7,21	1,42
10,36	3,99
14,18	10,56

Ayrıca

$$[\bar{p}\hat{v}\bar{v}] = 0{,}0431 \qquad m_o = \sqrt{\frac{0{,}0431}{7-3}} = \pm\, 0{,}10$$

parametrelerin ortalama hatalarının hesabı için Normal denklemlerin katsayılar matrisinin inversi alınarak

$$Q_x = \begin{bmatrix} +0{,}0006 & -0{,}0056 & +0{,}0014 \\ -0{,}0056 & +0{,}0713 & -0{,}0906 \\ +0{,}0014 & -0{,}0906 & +0{,}7268 \end{bmatrix}$$

$$m_a = m_o \sqrt{0{,}0006} = \pm\, 0{,}002$$

$$m_b = m_o \sqrt{0{,}0713} = \pm\, 0{,}027$$

$$m_o = m_o \sqrt{0{,}7268} = \pm\, 0{,}085$$ bulunur.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

/1/ DEMİREL, H. : Dengeleyici Fonksiyonlar. İDMMA, 1973

/2/ GÜRKAN, O. : En küçük kareler metodu ile dengeleyen fonksiyonun (ampirik formül) bulunması. İTÜ dergisi cilt 28,yıl 28, sayı 1, 1970

/3/ ŞERBETÇİ, M. : En küçük kareler yöntemine göre dengelemede gruplara ayırma. K.T.Ü. Trabzon, 1972

/4/ ŞERBETÇİ, M. : Korelasyon ve dengelemedeki yeri. İTÜ dergisi cilt 27, sayı 3, 1969

/5/ ULSOY, E. : Pratik matris hesabı ve dengeleme hesabına uygulanması Teknik Okulu yayınları, sayı 91, İst. 1966

/6/ YAŞAYAN, A. : Lineer-konform transformasyon dengelenmesi, İTÜ dergisi, cilt 32, sayı 2, 1974