BAZI ÖLÇÜLERİN STOKASTİK VEYA GEOMETRİK YAPISININ DEĞİŞMESİ DURUMUNDA İZDÜŞÜM MATRİSİNDEKİ DEĞİŞİMLERİN ARAŞTIRILMASI

Şerif HEKİMOĞLU

ÖZET

İzdüşüm (hat veya projection) matrisi ölçülerle bunların düzeltmeleri arasındaki bağlantıyı sağlar. Bu yüzden uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde temel oluşturur. İzdüşüm matrisi ölçülerin geometrik ve stokastik yapısını yansıtır. Bu yapılardaki bir değişimin izdüşüm matrisini nasıl değiştirdiği araştırılmıştır. Herhangi bir i.ölçünün ağırlığı Δp kadar değiştirildiği zaman, izdüşüm matrisinin bu ölçüye özgü köşegen elemanının $\Delta p>0$ ise büyüdüğü, $\Delta p<0$ ise küçüldüğü; diğer ölçülerin köşegen elemanlarının $\Delta p>0$ ise küçüldüğü, $\Delta p<0$ ise büyüdüğü kanıtlanmıştır. Ayrıca izdüşüm matrisinin bir ölçüye özgü köşegen elemanın yaklaşık sıfır yapılması için bu ölçünün ağırlığının yaklaşık sıfır yapılması gerektiği ve dolayısıyla izdüşüm matrisinin bir ölçüye özgü sütununun yaklaşık sıfır olduğu gösterilmiştir. Böylece M-Kestirimin En Küçük Kareler Yöntemi ile yinelemeli çözümünde ölçülerin ağırlıklarının değiştirilmesinin nedeni açıklanmaktadır. Ayrıca ölçü kümesindeki bir noktanın koordinatlarındaki herhangi bir değişmenin izdüşüm matrisi üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Sonuç olarak izdüşüm matrisinin, özellikle köşegen elemanlarının, ölçülerin ağırlıklarına bağlı olarak değiştirilebileceği gösterilmiştir.

ABSTRACT

Projection - prediction or hat - matrix connects outliers with their residuals. Therefore, it is a basis for the determination of outliers. Projection matrix reflects geometric or stochastic structure of observations. How any change in these structures affects the projection matrix is studied. When the weight of any *ith* observation is changed to an amount Δp, the diagonal element of projection matrix connected with this element, if $\Delta p > 0$, becomes larger, or if $\Delta p < 0$ diagonal element becomes smaller. On the other hand, diagonal elements of the remaining observations, if $\Delta p > 0$, become smaller, and if $\Delta p < 0$ diagonal elements become larger. All above statements have been proved in this paper. In addition, in order to be able to make any one diagonal element of the projection matrix approximately zero, the necessity of making the weight of this observation approximattely zero and that the column elements of the projection matrix relevant to this observation become zero have been shown. Thus, why the weights of the observations are changed in the solution of M-Estimation with iterative least squares method is described. Moreover, the effects of any variation of the coordinates of a point in a sample on projection matrix have been studied. Finally, it has been shown that the projection matrix - especially the diagonal elements - can be changed by means of the weights of the observations.

1. GİRİŞ

Ölçüler arasında birden fazla uyuşumsuz ölçü olması durumunda, bunların saptanmasında sorunlar çıkmaktadır. Ölçülerin değerlendirilmesinde kullanılan yöntemlerin güvenirliğini ölçmek için Robust (Sağlam) İstatistikte kırılma noktası (breakdown point) kavramı ortaya atılmıştır (Hampel vd.1986). Bu, kullanılan yöntem kaç tane uyuşumsuzu belirleyebilir; daha doğrusu uyuşumsuzların iyi (uyumlu) ölçülere oranı en çok yüzde kaç olabilir, anlamına gelir. Örneğin En Küçük Kareler Yönteminin (EKKY) kırılma noktası 1/n (n ölçü sayısı) dir (Rousseeuw ve Leroy,1987). Pratik olarak buradan EKKY nin uyuşumsuzlara karşı direnci sıfırdır denebilir. Bu yüzden Robust İstatistik'te kırılma noktası daha yüksek yeni yöntemler geliştirilmiş ve geliştirilmektedir (Rey,1983; Hampel vd. 1986; Rousseeuw ve Leroy,1987; Staudte ve Sheather, 1990). Robust istatistikte uyuşumsuz ölçülere ilişkin düzeltmelerin büyüklüğü temel bir rol oynamaktadır. Bu yaklaşım doğrudur, fakat burada tasarım matrisinden (ölçülerin geometrisinden) kaynaklanan geometrik etki göz önüne alınmamaktadır. İşte bu geometrik etki doğrudan izdüşüm matrisine ve dolayısıyla düzeltmelere de yansır. Bu yüzden izdüşüm matrisinin yapısının ve özelliklerinin araştırılması önem kazanmaktadır.

Robust M-Kestirimine göre bilinmeyenler bulunurken, EKKY' ndeki normal denklemlere karşılık gelen, doğrusal olmayan bir denklem takımı ortaya çıkar. Bu denklem takımı, bir ağırlık fonksiyonu seçilerek yinelemeli (iteratif) ve yeniden ağırlıklandırmalı EKKY ile çözülür (Ayhan ve Aksoy, 1991; Yaşayan, 1992; Xu, 1993; Hekimoğlu vd.1993). Ama bu çözüm yöntemlerinden yalnızca biridir. Yinelemeli çözüm uygulanırken her yineleme aşamasında başlangıçtaki ölçülerin ağırlıkları, seçilen ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak düzeltmelerin mutlak büyüklüğüne göre yeniden belirlenir ve EKKY uygulanırken bu ağırlıklar kullanılır. Dolayısıyla ağırlıklar her aşamada değiştiğinden buna bağlı olarak hesaplanacak izdüşüm matrisi de değişir.

Öte yandan izdüşüm matrisinin köşegen elemanları ölçüler arasındaki geometrik ve stokastik ilişkiler nedeniyle birbirine eşit olmazlar. Eğer ölçüler eşit ağırlıklı iken ölçüler arasındaki geometrik ve stokastik ilişkilerin izdüşüm matrisi (H) üzerindeki etkileri eşit olsaydı, izdüşüm matrisinin köşegen elemanları (h_{ii}) birbirine eşit olurdu :

$$h_{ii} = u/n, \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

Burada n ölçü, u bilinmeyen sayısıdır. Buna denkleştirilmiş (balanced) durum (Huber,1981; Kampmann, 1994) veya eşkaldıraçlı tasarım (Staudte ve Sheather, 1990) denir. Ölçülerin ağırlıkları eşit ise, herbir ölçünün h_{ii} 'sinin u/n 'den olan (h_{ii} - u/n) sapmasının kaynağı, ölçülerin geometrik yapısıdır. Eğer ölçüler eşit ağırlıklı değilse, bu sapmanın diğer bir kaynağı da ölçülerin stokastik yapısıdır, yani ağırlıklarıdır. Bu durumu oluşturmak için Kampmann (1994) P ağırlık matrisinin değiştirilmesini önermektedir. Daha açık olarak ağırlık matrisi öyle değiştirilsin ki izdüşüm matrisinin elemanları birbirine eşit, yani h_{ii} = u/n, olsun.

Öte yandan örnek kümede bazı noktalar, ölçü hataları yada başka nedenlerden dolayı ölçülerin büyük çoğunluğunun bulunduğu nokta kümesinden ayrı düşebilmektedir. Bu noktalara kaldıraç (leverage) noktaları denir ve genellikle uyuşumsuz ölçülerdir. Ayrıca ölçülen bazı noktaların konumları bazı nedenlerden (örneğin çeşitli nedenlerle oluşan deformasyonlar) dolayı zaman içinde değişmektedir. Özetle bazı nedenlerden dolayı ölçülerin geometrisinde değişiklikler olabilmektedir. İşte ölçülerin geometrik durumunda bir değişim olduğundan bu değişim izdüşüm matrisine de yansır.

Bu yazıda ölçülerin gerek stokastik (ağırlık matrisindeki) ve gerekse geometrik yapısındaki değişimlerin izdüşüm matrisinde, özellikle köşegen elemanları üzerinde ne gibi değişimlere kaynaklık ettiği, ve M-Kestiriminde uyuşumsuzları tanırken neden ağırlıkların değiştirildiği araştırılacaktır.

2. İZDÜŞÜM MATRİSİ

Robust istatistik kaynaklarında ingilizce " hat matrix " olarak adlandırılan izdüşüm matrisi H, A tasarım matrisini göstermek üzere

$$H = A\,(A^T A)^{-1} A^T \tag{2.1a}$$

olarak tanımlanır (Hoaglin ve Welsch, 1978; Huber, 1981; Rousseeuw ve Leroy, 1987; Staudte ve Sheather, 1990). Bazı kaynaklarda " projection matrix" (Meissl, 1982; Chatterjee ve Hadi, 1988) veya "prediction matrix" (Chatterjee ve Hadi, 1988) olarak adlandırılır. P ağırlık matrisi gözönüne alınırsa H izdüşüm matrisi daha genel olarak verilebilir (Kampmann, 1994).

$$H = A\,(A^T P A)^{-1} A^T P \tag{2.1b}$$

Dengelenmiş ölçüler ($\hat{l}$), ölçüler (l), düzeltmeler (v) ile, varyans-kovaryans matrisi (cov ( ) veya Σ) ve birim ağırlığın varyansı σ^2_0 ile gösterilirse;

$$\hat{l} = H\,l\,, \tag{2.2}$$

$$v = \hat{l} - l = -(I - H)\,l, \tag{2.3}$$

$$\Sigma_{\hat{l}\hat{l}} = \mathrm{cov}\,(\hat{l}\,) = \sigma^2_0\,H\,P^{-1}, \tag{2.4}$$

ve
$$\Sigma_{vv} = \mathrm{cov}\,(\,v\,) = \sigma^2_0\,(I - H)\,P^{-1} \tag{2.5}$$

yazılabilir. $(I - H)_{ii} = r_{ii}$ köşegen terimleri Jeodezi'de redundans olarak adlandırılır ve jeodezik ağların iç ve dış güvenirliklerinin tanımı bunlara dayanılarak yapılır (Förstner, 1979; Ayan, 1981; Niemeier, 1985; Müller, 1986; Demirel, 1987; Öztürk, 1987). (2.3) eşitliği daha açık olarak yazılırsa:

$$v_i = (1-h_{ii})\,l_i - \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\,l_j\,, \qquad j \neq i \;\;, \; i = 1,2, \ldots, n \tag{2.6}$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi, bir v_i düzeltmesi yalnızca l_i 'deki değil, diğer tüm ölçülerdeki ölçü hatalarından ve eğer varsa kaba hatalardan etkilenir. Buna EKKY 'nin yayma etkisi denir. EKKY' nin asıl zayıf yanı budur. İdeal durumda örneğin i. ölçü kaba hatalı ise buna karşılık gelen h_{ii} elemanı sıfıra , yani $(1- h_{ii})$ 1' e , diğer ölçülerin toplam etkisi ($\Sigma\, h_{ij}\, l_j$) sıfıra yaklaşmalıdır. Böylece kaba hatalı ölçünün düzeltmesi doğrudan ve yalnızca bu kaba hatadan etkilensin ve bu kaba hata başka ölçüleri bozmasın.

3. İZDÜŞÜM MATRİSİNİN ÖZELLİKLERİ

İzdüşüm matrisinin (2.1a) bilinen özellikleri, robust regresyon analizinde çeşitli kaynaklarda (Hoaglin ve Welsch, 1978; Huber, 1981; Rousseeuw ve Leroy, 1987; Staudte ve Sheather, 1990) ve jeodezi' de (Meissl, 1982) söz edilmesine karşın özellikle Chatterjee ve Hadi (1988) 'nin kitabında ayrı bir bölüm olarak en geniş biçimde ele alınmıştır. Bu son kaynakta toplam 13 özellikten, burada yalnızca bu yazının konusu çerçevesinde, bunlardan bazıları kısaltılarak ve kanıtlanmadan verilecektir:

a. H matrisi simetrik ve idempotent bir matristir, yani

$$H = H^T \;, \qquad H\,H = H^2 = H \tag{3.1}$$

$$\text{veya } h_{ii} = \|\,H_i\,\|^2 = h_{1i}^2 + h_{2i}^2 + \ldots + h_{ii}^2 + \ldots + h_{ni}^2\;. \tag{3.2}$$

Ayrıca bu özellikten yararlanarak

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} = 1 \;, \qquad \text{i. satır}\;, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ij} = 1 \;, \qquad \text{j. sütun} \tag{3.4}$$

ve

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\,h_{kj}, \qquad i, j = 1,2,3, \ldots, n \tag{3.5}$$

yazılabilir.

b. H matrisinin izi ve rangı , u bilinmeyen sayısı olmak üzere

$$iz(H) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} = u = rank\,(H) \qquad (3.6)$$

$$iz(I - H) = n - u \qquad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{2} = u \qquad (3.8)$$

ve ortalama kaldıraç

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii} \right) = \frac{u}{n} \qquad (3.9)$$

olarak verilir.

c. H matrisi tekil (singular) olmayan doğrusal dönüşümlere karşı değişmez. B tekil olmayan bir kare matris ve X bilinmeyenler vektörü olmak üzere

$$C = B^{-1}X \quad \text{ve} \quad W = A\,B \quad \text{ise,} \qquad (3.10)$$

$$l + v = A\,X = W\,C \qquad (3.11)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$H_w = W\,(W^T\,W)^{-1}\,W^T = H \qquad (3.12)$$

olur.

Eğer ölçülerin dayandığı koordinat sistemi yerine başka bir koordinat sistemi seçilirse H matrisi değişmez. Bu nedenle H matrisi koordinat sisteminin seçimine (yani datuma) bağlı değildir.

d. İzdüşüm matrisinin tüm köşegen elemanları

$$0 < h_{ii} < 1\,, \quad i=1,2,\ldots,n\,, \qquad (3.13)$$

ve diğer elemanları

$$-0,5 < h_{ij} < 0,5\,, \quad i = j\,, \quad i=1,2,\ldots,n\,, \quad j=1,2,\ldots,n\,, \qquad (3.14)$$

değerlerini alırlar.

e. (1) Bir ölçü silindiği, ya da ölçü sayısı bir azaltıldığı zaman, izdüşüm matrisinin köşegen elemanları büyür.
(2) Ölçü sayısı bir artırılırsa izdüşüm matrisinin köşegen elemanları küçülür.

4. ÖLÇÜLERİN AĞIRLIK MATRİSİ GÖZÖNÜNE ALINARAK İZDÜŞÜM MATRİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN YENİDEN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

Regresyon analizinde ölçüler genel olarak eşit ağırlıklı olarak kabul edilir. Halbuki Jeodezi'de farklı büyüklükler birlikte EKKY ile değerlendirilirken ölçüler genellikle eşit ağırlıklı olarak alınmaz. Bu nedenle bu bölümde özellikle 3. e ölçülerin ağırlıklarının farklı olması durumunda ayrıntılı olarak yeniden ele alınacaktır.

a. (2.1b)' nin bir parçası olan $A (A^T P A)^{-1} A^T$ matrisi simetrik olmasına karşın, bunun P ağırlık matrisiyle çarpımından oluşan izdüşüm matrisi simetrik değildir. Bu nedenle örneğin (3.4) ve (3.14) özellikleri bu durumda geçerli olmaz. Buradan izdüşüm matrisinin genel olarak idempotent, fakat simetrik olmadığı söylenebilir. Bu sorun düzeltme denklemleri türdeşleştirilerek (homojenleştirilerek) aşılabilir (Wolf, 1968), yani tüm yeni ağırlıklar eşit yapılabilir.

b. Bir ölçü silindiği, ya da ölçü sayısı bir azaltıldığı zaman, izdüşüm matrisinin köşegen elemanları büyür.

Ölçü sayısı n (n>u) olduğu durumda izdüşüm matrisi H, tasarım matrisi A, ve ağırlık matrisi P ve i. ölçü silindiği durumda izdüşüm matrisi geriye kalan (n-1) ölçü için H', ağırlık matrisi P' ve tasarım matrisi A' olsun. Bunlar arasındaki ilişkiler şöyle verilebilir:

$$A = \begin{bmatrix} A' \\ a_i^T \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P' & 0 \\ 0 & p_i \end{bmatrix}, \quad A^T = [A'^T \; a_i]. \qquad (4.1)$$

$$H = A (A^T P A)^{-1} A^T P \;, \quad H' = A' (A'^T P' A')^{-1} A'^T P' \qquad (4.2)$$

Buradan

$$A^T P A = A'^T P' A' + a_i p_i a_i^T \qquad (4.3)$$

$$A'^T P' A' = A^T P A - a_i p_i a_i^T \qquad (4.4)$$

yazılabilir. H ile H' matrisi arasında bir ilişki kurmak için Gauss (1821) un aşağıdaki matris özdeşliğinden yararlanılır:

$$(D + B^T C)^{-1} = D^{-1} - D^{-1} B^T (I + C D^{-1} B^T)^{-1} C D^{-1} \qquad (4.5)$$

Burada D uxu boyutlu,simetrik, düzenli bir matris, B ve C ise qxu boyutlu ve rankları q olan matrislerdir (Staudte ve Steather, 1990). Bu özdeşlik, (4.4) için

$D = A^T P A$, $B^T = -a_i$, $C = p_i a_i^T$ alınarak uygulanırsa

$$(A'^T P' A')^{-1} = (A^T P A)^{-1} + (A^T P A)^{-1} a_i \, (I - p_i \, a_i^T (A^T P A)^{-1} a_i)^{-1} p_i \, a_i^T (A^T P A)^{-1}$$

veya

$$(A'^T P' A')^{-1} = (A^T P A)^{-1} \{ I + a_i \, (I - p_i \, a_i^T (A^T P A)^{-1} a_i)^{-1} p_i \, a_i^T (A^T P A)^{-1} \}$$

elde edilir. Burada

$$h_{ii} = p_i \, a_i^T (A^T P A)^{-1} a_i \qquad (4.6)$$

kısaltmasıyla

$$(A'^T P' A')^{-1} = (A^T P A)^{-1} + \frac{(A^T P A)^{-1} a_i \, p_i \, a_i^T (A^T P A)^{-1}}{1 - h_{ii}} \qquad (4.7)$$

ve ayrıca (4.5) özdeşliği (4.3) için uygulanırsa

$$(A^TPA)^{-1} = (A'^TP'A')^{-1} - \frac{(A'^TP'A')^{-1} a_i p_i a_i^T (A'^TP'A')^{-1}}{1 + t_{ii}} \qquad (4.8)$$

$$t_{ii} = p_i a_i^T (A'^TP'A')^{-1} a_i \qquad (4.8a)$$

yazılabilir (Chatterjee ve Hadi, 1988; Staudte ve Sheather, 1990) .

H ile H' matrisi arasında bir bağlantı, (4-1) ve (4.8), (4.2)' de yerine konur ve (4.6) gözönüne alınarsa kurulabilir:

$$H = \begin{bmatrix} H' - \dfrac{A'(A'^TP'A')^{-1}a_ip_ia_i^T(A'^TP'A')^{-1}A'^TP'}{1 + t_{ii}} & \dfrac{A'(A'^TP'A')^{-1}a_ip_i}{1 + t_{ii}} \\ a_i^T(A'^TP'A')^{-1}A'^TP' - \dfrac{t_{ii}\, a_i^T(A'^TP'A')^{-1}A'^TP'}{1 + t_{ii}} & \dfrac{a_i^T(A'^TP'A')^{-1}a_ip_i}{1 + t_{ii}} \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

Bu matrisin birinci satırının ilk elemanının ilk terimindeki H' matrisi ve ikinci terim (n-1)x(n-1), birinci satırın ikinci elemanı ve ikinci satırdaki her iki eleman da tek boyutlu, yani tüm olarak bu matris nxn boyutludur. Bu matrisin birinci satırının ilk elemanında

$$B = a_i^T(A'^TP'A')^{-1}A'^T, \quad B^T = A'(A'^TP'A')^{-1}a_i$$

kısaltmalarıyla

$$A'(A'^TP'A')^{-1}a_ip_ia_i^T(A'^TP'A')^{-1}A'^T = B^Tp_iB = p_iB^TB \qquad (4.10)$$

elde edilir. B^TB bir karesel biçimdir, dolayısıyla köşegen terimleri artıdır. Ağırlıklar artı olduğuna göre, H ile H' matrisinin ilk (n-1) köşegen terimleri arasında şu ilişki geçerlidir :

$$h'_{jj} > h_{jj}, \quad j = 1,2,\ldots,n-1, \quad j \neq i$$

Buna göre, n (n > u) elemanlı ölçü kümesinden bir ölçü silindiği zaman izdüşüm matrisinin köşegen elemanları, önceki n ölçünün H izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarına göre büyüyecektir, yani redundanslar (her ölçünün kısmi sebestlik derecesi) küçülecektir. Örnek kümeden atılan herhangi bir ölçünün diğer ölçülerin h_{ii} 'leri üzerindeki etkileri (4.9)' dan bulunabilir. Aynı biçimde, n ölçüden herhangi birinin diğer ölçülerin h_{ii} 'leri üzerindeki etkileri hesaplanabilir.

Şimdiye değin herhangi bir ölçünün, diğer ölçülerin h_{ii} 'leri üzerindeki etkileri ele alındı. Aynı kural birden fazla ölçünün, diğer ölçülerin h_{ii} ' leri üzerindeki etkilerini bulmada da geçerlidir. Örneğin n (n > u) sayıda ölçü olsun. Herhangi k sayıda ölçüyü, n-k > u olacak biçimde ele alalım. Önce n-k ölçünün izdüşüm matrisi H', daha sonra tüm ölçülerin izdüşüm matrisi H bulunur. Bu durumda (4.1)' den (4.10)' a kadar çıkarılmış olan tüm eşitlikler geçerlidir; fakat a_i^T vektörü yerine kxu boyutunda bir matris ve p_i yerine kxk boyutunda bir matris yer almalıdır.

c. Ölçü sayısı bir artırılırsa izdüşüm matrisinin köşegen elemanları küçülür.

Aslında ölçü sayısını bir artırmak demek, A tasarım matrisine yeni bir satır eklemek demektir. Bu ya yeniden bir ölçü daha yapılarak ya da var olan bir ölçünün düzeltme denklemlerine bir kez daha eklenerek elde edilir. Ölçü sayısı n (n>u) iken izdüşüm matrisi H (n x n), tasarım matrisi A (n x u), ağırlık matrisi P(n x n); ölçü sayısı bir artırıldığında izdüşüm matrisi H'(n+1 x n+1), tasarım matrisi A'(n+1 x u), ağırlık matrisi P'(n+1 x n+1) olsun. Bunlar arasındaki ilişkiler (4.1)' e benzer olarak şöyle verilebilir:

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ a_{n+1}^T \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & p_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A'^T = [A^T \, a_{n+1}] . \tag{4.11}$$

Ayrıca (4.3)' e benzer olarak

$$A'^T P' A' = A^T P A + a_{n+1} p_{n+1} a_{n+1}^T \tag{4.12}$$

veya

$$A^T P A = A'^T P' A' - a_{n+1} p_{n+1} a_{n+1}^T \tag{4.13}$$

yazılabilir.

Bir önceki şıkta yapılan işlemler burada da i indisi yerine n+1 indisi konarak yinelenebilir. H' ile H matrisleri arasında (4.9)' a benzer bir ilişki verilebilir. Bu durumda H' matrisinin birinci satırının ilk elemanındaki H matrisi ve ikinci terim nxn, birinci satırın ikinci elemanı ve ikinci satırdaki her iki eleman da tek boyutlu, yani tüm olarak bu matris (n+1)x(n+1) boyutludur. Bu matrisin birinci satırındaki ilk elemanda

$$E = a_{n+1}^T (A'^T P' A')^{-1} A^T, \quad E^T = A' (A'^T P' A')^{-1} a_{n+1}$$

kısaltmalarıyla

$$A' (A'^T P' A')^{-1} a_{n+1} \, p_{n+1} \, a_{n+1}^T (A'^T P' A')^{-1} A'^T = E^T p_{n+1} E = p_{n+1} E^T E \tag{4.14}$$

elde edilir. $E^T E$ bir karesel biçimdir, dolayısıyla köşegen terimleri artıdır. Ağırlıklar artı olduğuna göre, H' ile H matrisinin ilk n köşegen terimleri arasında şu ilişki geçerlidir :

$$h'_{ii} < h_{ii}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

Bu sonuca göre, n (n > u) sayıda ölçü kümesine yeni bir ölçü eklenince, hesaplanan H' izdüşüm matrisinin köşegen terimleri, önceki n ölçünün H matrisinin köşegen elemanlarına göre küçülecektir, yani redundanslar büyüyecektir. (4.9)' a benzer olarak oluşturulan eşitlikten örnek kümeye yeni katılan herhangi bir ölçünün diğerlerinin h_{ii} üzerindeki etkileri bulunabilir.

Son iki özellik istatistikte tek bir özellik olarak verilir . Bilinmeyen sayısı (u) değişmez ise, n ölçü sayısı artarsa izdüşüm matrisinin köşegen elemanları büyümez (Chatterjee ve Hadi, 1988).

5. BİR ÖLÇÜNÜN AĞIRLIĞI DEĞİŞİNCE İZDÜŞÜM MATRİSİNİN DEĞİŞİMİ

Ölçülerin ağırlıkları farklı olsun. Herhangi bir ölçünün ağırlığı değiştirildiği zaman izdüşüm matrisinin tepkilerini araştırmak için iki ayrı yol izlenebilir.

a. Birinci Yaklaşım: Herhangibir ölçünün (i. ölçü) ağırlığı Δp ($p'_i = p_i + \Delta p$, $p'_i > 0$) kadar arttırılsın veya azaltılsın. Bu durumda izdüşüm matrisi H olsun. Bu i. ölçü çıkarıldıktan sonraki geriye kalan (n-1) ölçüye özgü izdüşüm matrisi H' olsun. Eğer $\Delta p > 0$ ise $h_{jj} < h'_{jj}$ ve $\Delta p < 0$ ise $h_{jj} > h'_{jj}$ olur.

4.b'de yapıldığı gibi, ağırlığı Δp kadar değişen i.ölçü, diğer ölçülerden çıkarılarak (4.1) 'e benzer biçimde

$$A = \begin{bmatrix} A' \\ a_i^T \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P' & 0 \\ 0 & p'_i \end{bmatrix}, \quad A^T = [A'^T \; a_i] \tag{5.1}$$

yazılabilir. Burada A', i. ölçünün olmadığı, yani geriye kalan (n-1) ölçüye ait tasarım matrisi, P' yine bu ölçülere ait ağırlık matrisi, A tüm ölçülere ait tasarım matrisi, P bunlara ait ağırlık matrisi, p'_i i. ölçünün değiştirilen yeni ağırlığı, a_i^T ise i. ölçünün tasarım matrisindeki i. satır vektörüdür. H izdüşüm matrisi için (4.9)' a benzer bir matris yazılabilir. Bu matriste (4.9)' daki p_i yerine p'_i gelir. Bu matrisin ilk satırının ilk elemanındaki ikinci terimin karesel biçimde olduğu (4.10) gözönüne alınarak aşağıdaki gibi kolayca gösterilebilir :

$$H' - \frac{B^T p'_i BP'}{1 + h'_{ii}} \tag{5.2}$$

Buna göre $p'_i = p_i$ iken $h_{ii} = h'_{ii}$ olacağından (5.2) ifadesi $p'_i > p_i$ için küçülecek, $p'_i < p_i$ için büyüyecektir. Dolayısıyla

$$\begin{array}{llll} \text{eğer } p'_i > p_i \text{, yani } \Delta p > 0 \text{ ise,} & h_{jj} < h'_{jj}, & j = 1,2,\ldots,n-1 & \\ & & & i \neq j \\ \text{eğer } p'_i < p_i \text{, yani } \Delta p < 0 \text{ ise,} & h_{jj} > h'_{jj}, & j = 1,2,\ldots,n-1 & \end{array}$$

yazılabilir. Ağırlığı değiştirilen ölçüye özgü izdüşüm matrisinin köşegen elemanında nasıl bir değişme olur ? Bunu inceleyelim. Eğer j = i ise, (4.9)' dan

$$h_{ii} = h_{nn} = \frac{a_i^T (A'^T P' A')^{-1} a_i p'_i}{1 + p'_i a_i^T (A'^T P' A')^{-1} a_i} \tag{5.3}$$

yazılabilir. Burada $p'_i = p_i$ iken $h_{ii} = h'_{ii}$ olacaktır. Daima $a_i^T (A'^T P' A')^{-1} a_i > 0$ olduğundan, (5.3) ifadesi $p'_i > p_i$ için büyüyecek, $p'_i < p_i$ için küçülecektir. Dolayısıyla bir ölçünün ağırlığı büyütülürse izdüşüm matrisindeki ilgili köşegen eleman büyüyecek; küçültülürse ilgili köşegen eleman küçülecektir. Ayrıca $p'_i = 0$, yani $\Delta p = - p_i$ ise, hem (5.3) ifadesi, hem de (4.9)' a benzer olarak yazılacak H matrisinin n. sütunundaki tüm elemanlar p'_i içerdiklerinden hepsi sıfır olur.

Eğer bir ölçünün etkisi azaltılmak isteniyorsa bunun ağırlığını küçültmek, etkisi kaldırılmak isteniyorsa ağırlığını sıfır yapmak yeterli olur. Böylece M-Kestirimde ortaya çıkan doğrusal olmayan denklem sisteminin EKKY ile yinelemeli olarak çözümünde ölçülerin yalancı ağırlıklarının düzeltmelere göre neden değiştirildiği anlaşılmaktadır. Özellikle düzeltmesi diğerlerine göre oldukça büyük olan ölçülerin ağırlıkları küçültülerek bunların diğer düzeltmelerin üzerindeki bozucu etkisi (EKKY' nin yayılma etkisi) azaltılmakta; hatta bunların ağırlıkları sıfıra götürülerek bozucu etkileri kaldırılmaktadır. Daha da önemlisi ağırlıkları küçülen ölçülerin h_{ii} ' leri de küçülmekte; hatta ağırlıkları sıfıra giden ölçülerin h_{ii} ' leri de sıfıra gitmektedir. Dolayısıyla $(1 - h_{ii})$ 1' e giderken kaba hata, bunu içeren ölçünün düzeltmesine doğrudan ve küçülmeden yansır. Böylece kaba hatalar yerelleştirilerek aranan parametre ve düzeltmeler robust olarak kestirilebilir.

(5.2) eşitliği, herhangi bir k. ölçüye özgü izdüşüm matrisinin köşegen elemanı için aşağıdaki gibi

$$h_{kk} - \frac{a_k(A'^TP'A')^{-1}a_i p'_i a_i^T(A'^TP'A')^{-1}a_k^T p_k}{1 + h'_{ii}}$$

yazılabilir. Burada i. ölçünün ağırlığı p_i Δp kadar yani $p'_i = p_i + \Delta p$, değiştiği zaman, tüm h'_{jj} ler hem Δp ye hem de diğer ölçülerin i. ölçüye uzaklığına, yani ölçülerin geometrisine bağlı olarak değiştiği, açıkça görülmektedir.

Eğer birden fazla (örneğin k tane) ölçünün ağırlıkları değiştirilirse, bu alt bölümde verilen eşitlikler geçerlidir. Bu durumda a_i^T vektörü yerine kxu boyutunda bir matris, ve p_i' yerine kxk boyutunda bir matris yer almalıdır.

b. İkinci Yaklaşım: Örnek kümede ağırlıkları farklı n ölçü ve bunların H (n > u olmak koşuluyla) izdüşüm matrisinin köşegen elemanları h_{ii} olsun. Herhangi bir i. ölçü için p_i ağırlığı Δp kadar, yani $p'_i = p_i + \Delta p$ değiştiğinde, izdüşüm matrisi H' nün köşegen elemanları h'_{ii} olsun. Böylece yeni P' matrisi ile değişmeden önceki P matrisi arasında

$$P' = P + \Delta P, \quad P = \mathrm{diag}\,(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n), \quad \Delta P = \mathrm{diag}\,(0,0,..., 0,\Delta p,0,...,0,0) \tag{5.4}$$

yazılabilir. Bu durumda A tasarım matrisindeki i. ölçüye özgü a_i^T satırı sanki ağırlığı Δp olan ayrı ek bir ölçü gibi düşünülürse, yeni durumda A' tasarım matrisi ve ağırlık matrisi P" (n+1)x(n+1) boyutlu olur ve (4.1) ile (4.3)' e benzer olarak

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ a_i^T \end{bmatrix}, \quad P'' = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \Delta p \end{bmatrix}, \quad A'^T = [A^T \; a_i]$$

$$A'^TP''A' = A^TPA + a_i \Delta p\, a_i^T \tag{5.5}$$

ve ayrıca

$$A^TP'A = A^TPA + A^T\Delta P A \tag{5.6}$$

yazılabilir.

Bir ölçüye özgü ağırlığın (p'_i) ikiye ayrılıp (p_i , Δp) tasarım matrisinde ilgili i. satırın iki kez (bir kez p_i ile, bir kez Δp ile) yazılması, normal denklemlerde sonucu değiştirmeyeceğinden

$$A'^TP''A' = A^TP'A \tag{5.7}$$

ve dolayısıyla

$$A^T\Delta PA = a_i \Delta p\, a_i^T \tag{5.8}$$

yazılabilir. Buradan izdüşüm matrisine özgü 4. Bölümde belirtilen özellikler geçerli olduğu sonucuna varılır ve kolaylıkla

$$\begin{array}{lll} \text{eğer } \Delta p > 0 \text{ ise ;} & h'_{jj} < h_{jj}, & j=1,2,....,n \\ \text{eğer } \Delta p < 0 \text{ ise ;} & h'_{jj} > h_{jj} & i \neq j \end{array} \tag{5.9}$$

yazılabilir.

c. **Uygulama:** Ağırlık değişiminin ölçülerin geometrisine bağlı olmasını bir örnek vererek daha yakından göstermek için, basit regresyon (u=2), veya basit doğrusal GAUSS-MARKOV modeli alınmıştır:

$$y_i = a + b\,x_i + \varepsilon_i \qquad i=1,2,3,\ldots,n$$

Burada y_i ölçüler ya da tepki değişkeni, a ve b bilinmeyenler , x_i taşıyıcı değişken (burada hatasız kabul edilecektir), $\varepsilon_i \sim N(\mu = 0, \sigma^2)$ normal dağılmış ölçü hatalarıdır. A tasarım matrisi

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$$

ve ağırlık matrisi

$$P = \mathrm{diag}\,(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n)$$

olsun. Izdüşüm matrisinin köşegen terimleri için

$$h_{ii} = \text{pay/payda}$$

$$\text{pay} = p_i \left\{ \sum_{k=1}^{n} p_k (x_i - x_k)^2 \right\}, \quad \text{payda} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} p_j\, p_k\, (x_j - x_k)^2. \qquad (5.10a)$$

veya

$$h_{ii} = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j} + \frac{p_i\,(x_i - x_{ort})^2}{\sum_{j=1}^{n} p_j\,(x_i - x_{ort})^2} \qquad (5.10b)$$

$$x_{ort} = \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} p_j$$

elde edilir.

Şimdi herhangi bir ölçünün (y_k) ağırlığını (p_k), Δp kadar ($p'_k = p_k + \Delta p$) değiştirelim. Bu yeni durumda yeni izdüşüm matrisinin köşegen terimleri için

$$h'_{ii} = \frac{\text{pay} + p_i\,\Delta p\,(x_i - x_k)^2}{\text{payda} + p_i\,\Delta p\,(x_i - x_k)^2 + \Delta p \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} p_j\,(x_k - x_j)^2 \right\}} \qquad (5.11)$$

yazılabilir. (5.9) eşitsizliklerinin burada da geçerli olduğu kolayca görülebilir. Bu son eşitlikten görüldüğü gibi, herhangi bir k. ölçüye ait p_k, Δp kadar değiştirilirse, tüm h'_{ii} 'ler hem Δp' ye hemde diğer ölçülerin k. ölçüye uzaklığına, yani ölçülerin geometrisine bağlı olarak değişmektedir. Eğer i=k ise yani ağırlığı değişen ölçü için (5.11) eşitliği

$$h'_{ii} = \frac{pay + \Delta p \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j (x_i - x_j)^2 \right\}}{payda + \Delta p \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j (x_i - x_j)^2 \right\}} \tag{5.12}$$

biçimine dönüşür. Buradan

$$\begin{array}{lll} \text{eğer } \Delta p > 0 \text{ ise ;} & h'_{ii} > h_{ii}, & i=1,2,....,n \\ \text{eğer } \Delta p < 0 \text{ ise ;} & h'_{ii} < h_{ii} & \end{array} \tag{5.13}$$

yazılabilir.

6. BİR ÖLÇÜNÜN KONUM DEĞİŞİMİNİN İZDÜŞÜM MATRİSİNE ETKİSİ

Regresyon analizi söz konusu olsun. Örnek kümede n ölçü çifti (x_i,y_i) vardır. Herhangi bir noktanın (i. noktanın) x_i değerinde Δx kadar bir değişim $(x'_i = x_i + \Delta x)$ olsun. Bu değişimin izdüşüm matrisinde yarattığı etkiler iki ayrı yolla araştırılabilir.

a. Birinci Yaklaşım: Bu i.ölçü alınıp tasarım matrisinin en sonuna getirilsin ve diğer ölçüler bir satır kaydırılsın. Bu durumda izdüşüm matrisi H' olsun. Tasarım matrisinin i. ölçü dışında kalan (n-1) ölçüye ait izdüşüm matrisi ise H olsun. Bu iki izdüşüm matrisinin köşegen terimleri arasında

$$h'_{jj} < h_{jj}, \quad j=1,2, ..., n-1$$

geçerlidir. Herhangıbir i. noktanın konumunda kayma olması durumunda, tasarım matrisinde bu noktaya özgü satır (a_i^T) , diğer satırlardan ayrılarak (5.1)' e bezer biçimde yazılabilir:

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ a_i^T \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & p_i \end{bmatrix}, \quad A'^T = \begin{bmatrix} A^T & a_i \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Burada a_i^T, i. noktanın kaymış $(x'_i = x_i + \Delta x)$ değişkenini veya bunların bir fonksiyonunu içerir. A ise geriye kalan noktalara özgü tasarım matrisidir. H' izdüşüm matrisi için (5.2)' ye benzer bir matris yazılabilir. Bu matrisin birinci satırındaki birinci terimin ikinci parçasının karesel biçimde olduğu, (4.10) 'a benzer olarak

$$C = a_i^T(A'^TP'A')^{-1}A^T, \quad C^T = A\,(A'^TP'A')^{-1}a_i$$

olmak üzere,

$$H - \frac{C^Tp_iCP}{1 + h'_{ii}}. \tag{6.2}$$

şeklinde kolayca gösterilebilir. Genel olarak C^Tp_iC' nin bir karesel biçim olması ve ağırlıkların artı olması dolayısıyla

$$h'_{jj} < h_{jj}, \quad j=1,2, ..., n-1 \tag{6.3}$$

yazılabilir.

Bu sonuç, yapısı daha karmaşık olan Gauss-Markov modelinde de geçerlidir. Ancak bu durumda bir noktanın koordinatlarında değişme varsa ($x'_i = x_i + \Delta x$, $y'_i = y_i + \Delta y$), tasarım matrisinde bu noktayla bağlantısı olan tüm ölçülerle ilgili satırlar ayrı bir grupmuş gibi düşünülmelidir. Bu durumda (5.1)' deki a_i^T artık bir matrise dönüşür ve (6.3) yine geçerlidir. Bu eşitsizlikte H', koordinat kayması durumundaki tüm ölçülerin izdüşüm matrisi, H ise koordinatları değişen i. nokta ile ilgili ölçülerin bulunmadığı, yani tasarım matrisinde i. ölçünün koordinatlarının yer almadığı, geriye kalan tüm ölçülere özgü izdüşüm matrisidir.

b. İkinci Yaklaşım : Değişme olmadığı durumda hesaplanan izdüşüm matrisi H olsun. Herhangi bir noktanın (k. noktanın) x 'inde Δx kadar bir değişme ($x'_k = x_k + \Delta x$) olması durumdaki izdüşüm matrisi H' olsun. Bu iki izdüşüm matrisinin köşegen terimleri arasında

$$T > 0 \text{ ise ; } h'_{ii} < h_{ii}$$
$$T < 0 \text{ ise ; } h'_{ii} > h_{ii}$$

ilişkileri geçerlidir. T ifadesi aşağıda verilecektir.

Geometrik etkiyi daha iyi görebilmek için ölçülerin ağırlıklarını eşit, yani $p_1=p_2=...=p_n=1$ alalım. Bu durumda h_{ii} için (5.10)' a benzer olarak

$$h_{ii} = \frac{\text{pay}}{\text{payda}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (x_i-x_j)^2}{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^{n} (x_j-x_l)^2} \quad \text{veya} \quad = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - x_{ort})^2}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{ort})^2} \qquad i=1,2,\dots n \qquad (6.4)$$

$$x_{ort} = \sum_{j=1}^{n} x_j \; / \, n$$

yazılabilir (Chatterjee ve Hadi, 1988). Öte yandan h'_{ii} için de (5.11)' e benzer olarak ($i \neq k$)

$$h'_{ii} = \frac{\text{pay} + 2\Delta x\,(x_k - x_i) + \Delta x^2}{\text{payda} + 2\Delta x\,(x_k - x_i) + \Delta x^2 + 2\Delta x \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_k - x_j) + (n-2)\Delta x^2} \qquad (6.5)$$

veya

$$h'_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - x'_{ort})^2}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x'_{ort})^2 + T_0} \qquad (6.6)$$

$x'_{ort} = x_{ort} + \Delta x \,/\, n \quad , \quad T_0 = \Delta x^2 + 2\,x_k\,\Delta x - 2\,\Delta x\; x'_{ort}$

yazılabilir. (6.5) eşitliğinin paydasında en sağdaki ifadeyi T, yani

$$T = \Delta x\, T' , \qquad T' = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_k - x_j) + (n-2)\,\Delta x \tag{6.7}$$

ile gösterelim. Buradan

$$\begin{array}{ll} T > 0 \ \text{ ise ;} & h'_{ii} < h_{ii} \\ T < 0 \ \text{ ise ;} & h'_{ii} > h_{ii} \end{array} \tag{6.8}$$

yazılabilir. T > 0 için ;

$$\Delta x > 0 \ \text{ ise, } \ T' > 0 \ \text{ için } \ \Delta x > -\frac{2n}{n-2}\,(x_k - x_{ort})$$

$$\Delta x < 0 \ \text{ ise, } \ T' < 0 \ \text{ için } \ \Delta x < -\frac{2n}{n-2}\,(x_k - x_{ort}) \tag{6.9}$$

olmalıdır. (6.5) eşitliğinden, herhangi bir noktadaki Δx değişiminin (hatasının) diğer ölçülerin h_{ii} değerleri üzerine nasıl etki yaptığı açık olarak görülmektedir. Bu etki, diğer noktaların bu noktaya olan uzaklığına $(x_k - x_i)$ ve Δx in büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir. Kısaca noktaların tasarımına yani geometrisine bağlı olur.

Eğer kaldıraç noktasında (k = i) ise köşegen eleman şöyle bulunur:

$$h'_{ii} = \frac{\text{pay} + T + \Delta x^2}{\text{payda} + T + \Delta x^2} \quad \text{veya} \quad = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - x'_{ort})^2 + T_0}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x'_{ort})^2 + T_0} \tag{6.10}$$

Buradan

$$\begin{array}{lll} T + \Delta x^2 > 0 \ \text{ ise ;} & h'_{ii} > h_{ii}, & i=1,2,\ldots,n \\ T + \Delta x^2 < 0 \ \text{ ise ;} & h'_{ii} < h_{ii}, & \end{array} \tag{6.11}$$

yazılabilir.

7. SONUÇ

Izdüşüm matrisi düzeltmelerle ölçüler arasındaki doğrudan ilişkiyi verir. Bu nedenle uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde temel bir rol oynar. Ölçüler EKKY ile değerlendirilirken, uyuşumsuz olan i. ölçünün kaba hatasının diğer ölçülerin düzeltmelerine yayılmaması için, h_{ii} değerinin oldukça küçük , yani redundansı ($r_{ii} = 1 - h_{ii}$)' nın 1' e yakın ve aynı zamanda diğer ölçülerin toplam etkisinin ($\sum h_{ij} l_j$) küçük yada sıfır olması istenir. Böylece kaba hata, ilgili ölçünün düzeltmesine doğrudan (küçülmeden) yansısın, yani kaba hata yerelleştirilmiş olsun. Bu bağlamda H izdüşüm matrisi büyük önem taşır. İzdüşüm matrisinin bilinen Chatterjee ve Hadi (1988) tarafından ayrıntılı olarak verilen 13 özellik, bu yazıda ölçüler farklı ağırlıkta olmaları durumunda yeniden gözden geçirilmiş ve özellikle ölçülerin ağırlıklarının değiştirilmesi durumu araştırılmıştır.

Ölçülerin farklı ağırlıkta olması durumunda, n ölçünün bulunduğu ölçü kümesine, bir ölçü daha eklendiği (yani ölçü sayısı n+1 olduğu), ya da bir ölçü bir kez daha yer aldığı zaman, yeni oluşan izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarının (h_{n+1n+1} dışında) küçüldüğü; tersine ölçülerden birinin (i. ölçünün) silindiği, yani ölçü sayısı (n-1) olduğu zaman oluşan yeni izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarının (h_{ii} dışında) büyüdüğü görülmüştür.

Bir ölçü kümesinde herhangi bir ölçünün ağırlığı Δp kadar değişirse, yeni izdüşüm matrisinin hem Δp' ye hem de diğer ölçülerin ağırlığı değişen ölçüye uzaklığına, yani ölçülerin geometrisine bağlı olarak değiştiği; daha doğrusu $\Delta p > 0$ ise, yeni izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarının kesinlikle küçüldüğü, $\Delta p < 0$ ise büyüdüğü kanıtlanmıştır. Ağırlığı değişen ölçünün ağırlığı büyütülürse izdüşüm matrisindeki ilgili köşegen eleman büyüyecek; küçültülürse ilgili köşegen eleman küçülecektir. Ayrıca $p'_i = 0$, yani $\Delta p = - p_i$ yapılırsa, H matrisinin i. sütunundaki tüm elemanlar p'_i içerdiklerinden hepsi de sıfır olurlar. Bu önemli bir özelliktir. M-Kestiriminde bir uyuşumsuz ölçünün saf dışı bırakılmasını açıklar. Kaba hatalı i. ölçünün ağırlığının sıfıra götürülmesi ile tüm h_{ji} değerleri sıfıra götürülmüş olur. Böylece bu ölçünün diğer ölçülerin düzeltmeleri ve kestirilen parametreler üzerindeki bozucu etki kaldırılmış olur. Böylece ölçülerin ağırlıkları değiştirildiği zaman yeni oluşan izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarının nasıl değiştiği gösterilmiştir.

Eğer bir ölçünün etkisi azaltılmak isteniyorsa bunun ağırlığını küçültmek, etkisi kaldırılmak isteniyorsa ağırlığını sıfır yapmak yeterli olur. Böylece M-Kestirimde ortaya çıkan doğrusal olmayan denklem sisteminin EKKY ile yinelemeli olarak çözümünde ölçülerin yalancı ağırlıklarının düzeltmelere göre neden değiştirildiği anlaşılmaktadır. Özellikle düzeltmesi diğerlerine göre oldukça büyük olan ölçülerin ağırlıkları küçültülerek bunların diğer düzeltmelerin üzerindeki bozucu etkisi (EKKY' nin yayılma etkisi) azaltılmakta; hatta bunların ağırlıkları sıfıra götürülerek bozucu etkileri kaldırılmaktadır. Daha da önemlisi ağırlıkları küçülen ölçülerin h_{ii} ' leri de küçülmekte; hatta ağırlıkları sıfıra giden ölçülerin h_{ii} ' leri de sıfıra gitmektedir. Dolayısıyla ($1- h_{ii}$) 1' e giderken kaba hata, bunu içeren ölçünün düzeltmesine doğrudan ve küçülmeden yansır. Böylece kaba hatalar yerelleştirilerek aranan parametre ve düzeltmeler robust olarak kestirilebilir.

Basit regresyon modeli ele alınarak; herhangi bir noktanın x 'i Δx kadar değişirse, yani bu nokta kaldıraç noktası ise, bu durumda yeni izdüşüm matrisinin tüm köşegen elemanlarının Δx 'e ve diğer noktaların kaldıraç noktasına olan uzaklığına, yani nokta kümesinin geometrisine bağlı olarak değiştiği gösterilmiştir. Dolayısıyla, genel olarak ölçü kümesinde bulunan noktaların birisinin (i. noktanın) koordinatlarındaki bir değişme ($x'_i = x_i + \Delta x$, $y'_i = y_i + \Delta y$), bu noktayla hiçbir bağlantısı olmayan ölçülere özgü izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarını küçültür. Dolayısıyla ölçülerin geometrisinde bir değişim olduğu zaman, buna bağlı olarak yeni oluşan izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarının nasıl değiştiği gösterilmiştir.

Sonuç olarak ölçülerin başlangıçtaki ağırlıkları düzenli bir biçimde değiştirildiği zaman, bulunan izdüşüm matrisinin köşegen elemanlarının da düzenli bir biçimde değiştiği görülmüştür.

Teşekkür: Yardım ve uyarılarından dolayı sayın Surkay Akbarov, Emin Ayhan, H. Hüseyin Demirel, D. Uğur Şanlı ve Seyfullah Demirkaya' ya teşekkür ederim.

K A Y N A K L A R

/1/ Ayan,T. : Jeodezik Ağların Optimizasyonu. Doçentlik Tezi. İTÜ İnşaat Fakültesi, 1981.

/2/ Ayhan,E.,Aksoy,Z.N. : Robust Kestirim ve Kaba Hatalı Ölçülerin Belirlenmesi. Harita Dergisi, Sayı 106. S.22-39, 1991.

/3/ Chatterjee,S., Hadi,A.S. : Sensitivity Analysis in Linear Regression. John Wiley & Sons, New York, S. 9-10,22,24,25, 1988.

/4/ Demirel,H. : Nirengi Ağlarının Dengelenmesi ve Sonuçların Test Edilmesi. Harita Dergisi Sayı 98, S.1-17, 1987.

/5/ Förstner,W. : Das Programm TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodatischer Lagenetze. Zfv, Vol.104, S.61-72, 1979.

/6/ Gauss,C.F. : Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae. Werke 4, Sect.35, Gottingen, 1821.

/7/ Hampel,F., Rousseeuw,P., Stahel,W. : Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions. John Wiley and Sons, New York. 1986.

/8/ Hekimoğlu,Ş., Ayan,T., Aktaş,A.O. : Birden Fazla Uyuşumsuz Ölçünün Robust Kestirim Yöntemleriyle Tanısı ve Uyuşumsuz Ölçü Testleriyle Belirlenmesi. YTÜ Prof.Wolf Sempozyumu, İstanbul, 3-5 Kasım 1993.

/9/ Hoaglin,D.C., Welsch,R.E. : The Hat Matrix in Regression and ANOVA. The American Statistician, Vol.32, No.1, S.17-22. February 1978.

/10/ Huber,P.J. : Robust Statistics. John Wiley and Sons, New York Chichester, S.156-173, 1981.

/11/ Kampmann,G. : Robuste Deformation Analyse Mittels Balancierter Ausgleichung. AVN 1, S.8-17, 1994.

/12/ Meissl,P. : Least Squares Adjustment A Modern Approach. Mitteilungen der Geodatischen Institut der Technischen Universitat Graz, Folge 43, 1982.

/13/ Müller,H. : Zur Berücksichtigung der Zuverlässigkeit bei der Gewichtsoptimierung Geodätischer Netze, ZfV 4, S.157-169, 1986.

/14/ Niemeier,W. : Netzqualitat und Optimierung In: PELZER,H. (Hrsg.): Geodatische Netze in Landes-und Ingenieurvermessung II, Wittwer Stuttgart, S.153-221, 1985.

/15/ Öztürk,E. : Jeodezik Ağlarda Duyarlık ve Güven Ölçütleri, Türkiye I.Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı S.641-699, Ankara, 23-27 Şubat 1987.

/16/ Rey, W.J.J. : Introduction to Robust and Quasi-Robust Statistical Methods, Springen-Verlag Berlin Heidelberg New York, Tokyo,1983.

/17/ Rousseeuw,P.J., Leroy,A.M. : Robust Regression and Outlier Detection, John Wiley and Sons, New York, S.12-217, 1987.

/18/ Staudte, R.G., Sheather,S.J. : Robust Estimation and Testing, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc. New York, S.200-210, 213,223, 1990.

/19/ Wolf,H. : Ausgleichungsrechnung Nach Der Methode Der Kleinsten Quadrate. Ferd. Dümlers Verlag Bonn, S.44, 1968.

/20/ XU,P.L. : Consequences of Constant Parameters and Confidence Intervals of Robust Estimation. Anno LII-Bollettino Di Geodesia e Scienze Affini-N.3, 1993.

/21/ Yaşayan,A. : Robust Kestirim Kavramı, İlkesi ve Uygulamaları Üzerine İrdelemeler. Harita ve Kad.Müh.,Sayı 72, 1992.