BAĞIL GÜVEN ELİPSLERİ İLE DEFORMASYON ANALİZİ (*)

Doç.Dr. Tevfik AYAN

Zusammenfassung

In letzten Jahren haben die Methoden der Deformationsanalyse grosse Fortschritte gemacht. Die erfasste genauigkeit der elektronischen Messgeräten und die Berechnungsmöglichkeiten in elektronischen Rechenanlagen haben eine strenge Lösung der Probleme ermöglicht.

Hier wird ein anschauliches Verfahren, von vielen Verfahren über Deformationsanalyse in statischen Modell behandelt. Das Verfahren Deformationsanalyse mit Hilfe relativer Konfidenzellipse basiert auf freie Netzausgleichung.

Erstens werden die Festpunkte, die dauernhaft stabil bleiben sollen , überprüft, ob sie sich Lagemässig geändert haben. Die statistisch gesichert stabil erwiesene Festpunkte werden zur Verbindung der Messungen aus der Ersten und zweiten Epoche Verwenden. Die Messungen aus der ersten und zweiten Epoche werden gemeinsem zu einer freien Ausgleichung einbezogen. Bei der Ausgleichung setz sich das Koordinatenunbekanntenvektor, aus der beiden Epochen gemeinsamen Festpunkt koordinaten $\underline{x}_F$, und Objektpunkt koordinaten $\underline{x}_1$ zur Epoche t_1 und $\underline{x}_2$ zur Epoche t_2 zussammen.

Als Ergebnis der Ausgleichung erhält man $\underline{x}_F$, $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ und σ_o. Die Verscheibungs vektoren und deren Kovarianzmatrix werden als Differenzen von x_2 und x_1 und von $\underline{Q}_{xx}$ ermittelt. Die relative Konfidenzellipse der Verchiebungsvektoren werden berechnet und auf den Punkt P_i (t_2) gezeichnet. Fällt der Punkt P_i (t_1) nicht in die Ellipse, So wird das Verschiebungsvektor singnifikant von null betrachtet.

(*): Yazarın 12. Kasım.1981 de doçentlik sınavı deneme dersinden özetlenmiştir.

1- Giriş

Mühendislik yapılarında olası deformasyonları saptayarak, büyük zararlara yol açılmadan önlem alabilmek için yapı üzerinde ve çevresinde belirli zaman aralıklarında jeodezik ölçmeler yapılır. Bu ölçmelerin, küçük boyutlardaki deformasyonların meydana çıkarılmasını sağlayabilmesi için yüksek presizyonda yapılması gerekir. Bunu sağlamak için de daha yapının inşaatı sırasında yapı üzerinde pilyeler, ölçme markaları v.b. gerekli ölçme düzenleri göz önünde tutulur. Gerek yapının karakteristik yerlerinde gerekse yapı dışında zamanla yer değiştirmiyeceği tasarlanan noktalarla bir jeodezik ağ oluşturulur. Kontrol ağı adını alan bu ağ noktalarının rölatif hareketlerinin saptanması yoluna gidilir. Deformasyon adı verilen bu rölatif hareketlerin saptanması, ölçüler ile bunların arasındaki geometrik ilişkilerin analizi ve matematik istatistik test yöntemleriyle gerçekleştirilir.

Deformasyon analizi dinamik, kinematik ve statik olmak üzere üç ayrı modelde ele alınabilir. Bunlardan dinamik model yapıya etkiyen kuvvetlerle, yapı karekteristiklerinin birbirleriyle ve zamanla ilişkileri ve deformasyona neden olan dönüşüm fonksiyonunun araştırılmasına dayanır. Kinematik modelde ise inceleme konusu ağ noktalarının birbirlerine göre hareket ve hız ilişkileridir. Statik modelde ise ağın ölçmeler süresinde stabil kaldığı varsayılir ve ölçme periyotları arasındaki zamanda ne yapıya etkiyen kuvvetler ne de nokta hareketleriyle ilgilenmeksizin, iki yineleme ölçmesi zamanındaki nokta konumları araştırılır (Welsch 1981). Aşağıda açıklanacak olan bağıl güven elipsleri ile deformasyon analizi yöntemi statik modele tipik bir örnektir.

Bağıl güven elipsleri ile deformasyon analizi yöntemine geçmezden önce tüm deformasyon analizi yöntemlerinde kullanılan serbest ağ dengelemesinin burada kısaca açıklanmasında yarar vardır.

2- Serbest Ağ Dengelemesi

Ağ dengelemesinin temel bağıntılarından, fonksiyonel model

$$\underline{\ell}+\underline{v} = \underline{A}\ \underline{x} \qquad 2.1$$

ve stokastik model

$$\underline{K}_{\ell} = \sigma_o^2 \, \underline{Q}_{\ell} \qquad 2.2$$

şeklinde yazılmaktadır ; burada $\underline{\ell}$ bir t_i zamanındaki ölçüler vektörünü, $\underline{v}$ bunun düzeltmeler vektörünü, $\underline{A}$ düzeltme denklemleri katsayılar matrisini, $\underline{x}$ bilinmeyenler vektörünü, $\underline{K}_{\ell}$ ölçülerin kovaryans matrisini, σ_o teorik standart sapmayı $\underline{Q}_{\ell}$ ölçülerin kofaktörler matrisini göstermektedir. Fonksiyonel model ile stokastik model arasındaki ilişki

$$\underline{A}' \, \underline{Q}_{\ell}^{-1} \, \underline{A} \, x = \underline{A}' \, \underline{Q}^{-1} \, \underline{\ell} \qquad 2.3$$

kısa gösterimi ile

$$\underline{N} \, \underline{x} = \underline{n} \qquad 2.4$$

normal denklemleri ile verilmektedir.

Deformasyon analizinde hipotezlerden mümkün olduğu kadar sakınmak ilkesine uygun olarak ağın dengelenmesi aşamasında, ağda sabit nokta varsayımı yapılmaz, yani bütün ağ noktaları değişken olarak alınırsa, yani tüm ağ noktaları için koordinat bilinmiyeni seçilirse, ağın konumlandırılması mümkün olmaz, diğer bir deyişle (ağda kenar ölçüleri varsa ölçek dışında) dış parametreler belirsizdir. Bu durumun cebirsel olarak açıklanması ise $\underline{N}$ matrisinin tekil olduğu, bu nedenle de 2.4 denkleminin sonsuz sayıda çözümü olduğu şeklindedir. $\underline{x}$ bilinmiyenlerine tek anlamlı bir çözüm bulmak üzere Moore-Penrose invers $\underline{N}^+$ (Krüger, J. 1980) kullanılarak

$$\underline{x} = \underline{N}^+ . \underline{n} \qquad 2.5$$

elde edilir. Böylece bulunan $\underline{x}$ vektörü tüm çözümler içinde normu en küçük olanıdır,

$$x' x = \min. \qquad 2.6$$

ve $\underline{x}$ in kofaktörler matrisi $\underline{Q}_{xx} = \underline{N}^+$ nın izi, diğer tüm çözümlere ait kofaktörler matrislerinin izlerinden küçüktür.

$$t_r\,(\underline{Q}_{xx}) = \min \qquad 2.7$$

Moore-Penrose inversin hesabı için $\underline{N}$ normal denklemler katsıyalar matrisinin spektral ayrışımı ile, $\underline{D}$, $\underline{N}$ in spektral matrisi yani $\underline{N}$ in sıfırdan büyük özdeğerlerinden oluşan bir köşegen matris

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{bmatrix} \qquad 2.8$$

ve $\underline{S}$, $\underline{N}$ in sıfırdan büyük özdeğerlerine karşılık özvektörleri $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \ldots \underline{S}_r$ den oluşan modal matris

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \vdots & \underline{S}_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \underline{S}_r \end{bmatrix} \qquad 2.9$$

ve $\underline{N}$ in sıfıra eşit özdeğerlerine karşılık modal matrisi

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_1 & \vdots & g_2 & \vdots & \cdots & \vdots & g_{u-r} \end{bmatrix} \qquad 2.10$$

göstermek üzere

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \underline{S} & \vdots & \underline{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D} & \vdots & \underline{0} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \underline{0} & \vdots & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}' \\ \cdots \\ \underline{G}' \end{bmatrix} \qquad 2.11$$

$$\underline{N} = \underline{S}\ \underline{D}\ \underline{S}'$$

yazılarak, Moore-Penrose invers

$$\underline{N}^{+} = \underline{S}\ \underline{D}^{-1}\ \underline{S}' \qquad 2.12$$

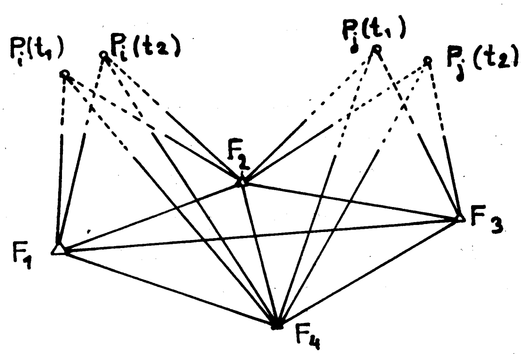
ile hesaplanır (Krüger 1980).

3- Yöntemin Tanımı

Kontrol ağı t_1 zamanında yapılan ℓ_1 ölçüleri ile t_2 zamanında yapılan ℓ_2 ölçüleri iki ayrı ağ ölçüleriymiş gibi düşünülerek, ağ ayrı ayrı serbest dengelense, iki dengelemede aynı yaklaşık koordinatlar kullanılsa bile iki ağ datumu birbirinin aynı değildir. Bu nedenle de doğrudan doğruya birbirleri ile karşılaştırılamazlar. Karşılaştırma yapabilmek için datum birliğini sağlıyacak ortak noktalar aranır.

Kontrol ağının kurulması sırasında sabit nokta olarak seçilen noktalara istatistik testler uygulayarak, t_2-t_1 zaman aralığında yerleri değişmeyenler saptanacak olursa, bu noktalardan datum birliğini sağlamak için yararlanılabilir. Ağın kurulması sırasında sabit nokta olarak tasarlanan, ancak istatistik testler sonucu yerlerinin değiştiği saptanan sabit noktalara artık deformasyon noktaları gözü ile bakılır.

Sabit noktaların testinden sonra, ℓ_1 ve ℓ_2 ölçüleri birlikte ele alınarak, kontrol ağı, serbest ağ dengelemesi ile 2. bölümde açıklandığı gibi dengelenir. Tümden dengeleme adı verilen bu hesapta, Şekil 1 den de görüldüğü gibi,



Şekil 1: Bir kontrol ağı örneği (P_i (t_1) ve P_i (t_2) noktaları özdeş noktalardır.)

deformasyon noktalarının t_1 zamanındaki konumu için birer çift, t_2 zamanındaki konumu için birer çift ve sabit noktalar için yalnız birer çift koordinat bilinmiyeni seçilir. Bu şekilde yürütülen tümden dengeleme sonucunda, deformasyonlar saptamak üzere deformasyon noktalarında teker teker deformasyon vektörleri ve onların presizyonları ile incelenir(Heck, ve diğerleri 1977)

4- Sabit Noktaların Test Edilmesi

Kontrol ağının ℓ_1 ve ℓ_2 ölçüleriyle ayrı ayrı iki kez serbest dengelenmesinden nokta koordinatları

$$\underline{x}_1' = \left[\underline{x}_{1F}' \ \vdots \ \underline{x}_1'\right] \qquad 4.1$$

$$\underline{x}_2' = \left[\underline{x}_{2F}' \ \vdots \ \underline{x}_2'\right] \qquad 4.2$$

olarak elde edildikten sonra, sabit nokta koordinatları $\underline{x}_{1F}$ ile $\underline{x}_{2F}$ karşılaştırmak üzere, ağın datum ayrılığını gidermek üzere, bu t_2 zamanı koor - dinatları $\underline{x}_{2F}$ in $\underline{x}_{1F}$ üzerine Helmert transformasyonu yapılır. Bir F_i noktası için yazılacak düzeltme denklemleri

$$Vx_{1i} = K_{01} + K_{11}\, x_{2i} - K_{12}\, Y_{2i} - x_{1i} \qquad 4.3$$

$$Vy_{1i} = K_{02} + K_{12}\, x_{2i} - K_{11}\, Y_{2i} - Y_{1i} \qquad 4.4$$

olur. Transformasyondan elde edilecek V_x, V_y çakışma hataları, noktaların ortalama konum hataları ile karşılaştırılarak yerleri değişen sabit noktaların saptanması yoluna gidilir. Karşılaştırma için istatistik teorisinin tam olarak uygulanmasına pek gerek yoktur. Çünkü basit karşılaştırma sonucu yerleri değiştiğine karar verilen noktalar sonradan deformasyon noktası olarak yeniden inceleneceklerdir. Bu nedenle de karşılaştırma sırasında yerleri değişip değişmediğinden kuşku duyulan sabit noktaları yerleri değişmiş saymak daha uygun olur. Ayrıca varsa yerleri değişen noktalar tüm V_x, V_y leri etkiliyeceklerinden yerlerinin değiştiğine karar verilen noktalar ayrılarak transformasyon yeniden yapılmalı ve ne duruma geldikleri yeniden görülmelidir.

Kontrol ağında yerleri değişmeyen sabit noktalar böylece saptandıktan sonra daha önce açıklanan tümden dengelemeye geçilir.

5- Deformasyonların Lokalize Edilmesi

Tümden dengelemenin ölçüler, bilinmiyenler vektörü ile bilinmeyenlerin kofaktörler matrisini

$$\underline{\ell} = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \cdots \\ \underline{\ell}_2 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_F \\ \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{Q}_{xx} = (\underline{A}'\underline{P}\,A)^{+} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{FF} & \underline{Q}_{F1} & \underline{Q}_{F2} \\ \underline{Q}_{1F} & \underline{Q}_{11} & \underline{Q}_{12} \\ \underline{Q}_{2F} & \underline{Q}_{21} & \underline{Q}_{22} \end{bmatrix} \qquad 5.1$$

şeklinde alt matrislerle gösterelim.

Bir deformasyon noktası P_i nin t_1 ve t_2 zamanlarındaki konumları arasındaki fark yani bu noktanın deformasyon vektörü

$$\underline{d}_i = \begin{bmatrix} d_{yi} \\ d_{xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{2i} - Y_{1i} \\ X_{2i} - X_{1i} \end{bmatrix} \; ; \; \underline{Q}_{di} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{yyd} & \underline{Q}_{yxd} \\ \underline{Q}_{xyd} & \underline{Q}_{xxd} \end{bmatrix} \qquad 5.2$$

ve bunun kofaktörler matrisi tüm kofaktörler matrisinden

$$\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c}{P_i(t_1)} & \multicolumn{2}{c}{P_i\,(t_2)} \\ q_{(yiyi)_{11}} & q_{(yixi)_{11}} & q_{(yiyi)_{12}} & q_{(yixi)_{12}} \\ & q_{(xixi)_{11}} & q_{(xiyi)_{12}} & q_{(xixi)_{12}} \\ \hdashline & & q_{(yiyi)_{22}} & q_{(yixi)_{22}} \\ & & & q_{(xixi)_{22}} \end{array}$$

$$\begin{aligned} q_{yyd} &= q_{(yiyi)_{11}} + q_{(yiyi)_{22}} - 2\,q_{(yiyi)_{12}} \\ q_{xxd} &= q_{(xixi)_{11}} + q_{(xixi)_{22}} - 2\,q_{(xixi)_{12}} \\ q_{yxd} &= q_{xyd} = q_{(yiyi)_{11}} + q_{(xixi)_{22}} - q_{(yixi)_{12}} - q_{(xiyi)_{12}} \end{aligned} \qquad 5.3$$

olur. p_i noktası için uygulanacak istatistik test için sıfır hipotezi

$$H_o : \underline{d}_i = \underline{0} \tag{5.4}$$

alınarak, test büyüklüğü olarak yine d_i vektörünün karesel şeklinden

$$T = \frac{\underline{d}_i' \, \underline{Q}_{di}^{-1} \, \underline{d}_i}{2.\sigma_o^2} \tag{5.5}$$

seçilir. T , F tablosundan alınacak $F_{\alpha,2,f}$ değeri ile karşılaştırılır

$$T \leq F_{\alpha,2,f} \qquad f= n-u+d_i \tag{5.6}$$

Bu karşılaştırma nümerik olarak yapılmazdan önce $\underline{d}_i$ nin varyans-kovaryans matrisi inverzi,

$$\underline{K}_{di}^{-1} = \frac{\underline{Q}_{di}^{-1}}{\sigma_o^2}$$

5.6 da yerine konarak eşitsizliğin sınır değeri alarak, eşitlik olarak yazılırsa

$$\underline{d}_i' \, \underline{K}_{di}^{-1} \, \underline{d}_i = 2.F_{\alpha,2,f} \tag{5.7}$$

elde edilir. Bu eşitlik ise bir elips denklemi göstermektedir (Pelzer 1980_b S.284). Açık yazılarak vektör, matris, vektör çarpımları yapılarak, elipsin merkezil denklemine geçilirse, 5.7 nin dengelemeden bilinen bağıl ortalama hata elipsine benzediği, yalnızca eksen uzunluklarının $k=\sqrt{2.F_{\alpha,2,f}}$ kadar büyük olduğu görülür. $S=1-\alpha$ istatistik güvenle $\underline{d}_i$ nin güven alanını belirleyen bu elips dengeleme de bağıl güven elipsi olarak anılmaktadır.

Şu halde tümden dengeleme sırasında bağıl ortalama hata elipsinin elemanları hesaplanarak, eksenleri k ile çarpılırsa , d_i vektörleri bu elipsler yardımıyla incelenebilir.

Bağıl ortalama hata elipsinin eksenleri

$$A_H^2 = \sigma_o^2 \ (q_{yyd} + q_{xxd} + w)$$

$$B_H^2 = \sigma_o^2 \ (q_{yyd} + q_{xxd} - w)$$

$$w^2 = (q_{xxd} - q_{yyd})^2 - 4 \ q_{yxd}^2$$

ve büyük eksenin açıklık açısı

$$\Theta = \frac{1}{2} \ \arctan \ \frac{2 \ q_{yxd}}{q_{xxd} - q_{yyd}}$$

ile hesaplanmalıdır(Wolf 1975).

Pratikte bu testin geometrik yorumu uygulanır. Bunun için ağın çizimi üzerine deformasyon vektörü ve bağıl güven elipsi aynı ölçekle elips vektörü ucunda yani $p_{i(t2)}$ noktasında çizilir. $p_{i(t1)}$ noktası elipsin dışında kalıyorsa p_i yer değiştirmiş sayılır ve d_i deformasyon vektörü signifikanttır denir.

$p_{i(t1)}$ elipsin içinde kalıyorsa, d_i deformasyon vektörü değildir sıfır hipotezi geçerlidir.

6- Yorum

Deformasyon noktalarında, deformasyonların saptanmasından sonra bunların nedenlerini açıklamaya yarayacak biçimde genelleştirilmesi, matematiksel bir fonksiyonla, örneğin bir polinomla açıklanması yoluna gidilir. Bu sırada deformasyon vektörü d nin x ve y bileşenleri dx ve dy ayrı ayrı ele alınır. Polinomun derecesi, üzerinde deformasyon saptanan nokta sayısına bağlıdır. dx bileşeni için

$$x_2 - x_1 = dx\ (x,y) = b_{00} + b_{01}\, x + b_{02}\, y + b_{11}\, x^2 + b_{22}\, y^2 + b_{12}\, xy + \ldots$$

yazılarak, b_{ij} katsayılarının sayısı u, deformasyon noktası sayısı n den küçük olmak üzere en küçük kareler yöntemiyle b_{ij} katsayıları saptanabilir.

Bir deformasyon analizinden elde edilecek sonuçların tutarlılığı, uygulanan yöntemin içerdiği varsayımlara dayanır. Kaçınılmaz varsayımlar ise kesinlikle test edilmelidir. Bu yazı içinde yer almayan bu türdeki testler

a) dengelemenin fonksiyonel modelinin test edilmesi, b) dengelemenin stokastik modelinin test edilmesi, c) kaba hatalı ölçülerin ayıklanması olarak sayılabilir (Ayan 1983).

Deformasyonların saptanması için açıklanan bağıl güven elipsleri yöntemi deformasyon vektörlerinin kovaryans matrislerini doğrudan doğruya inceleme konusu olan, pek çok yerde başarı ile uygulanmış kısa ve gösterimi güzel bir yöntemdir.

KAYNAKLAR

Ayan, T. (1983) : Jeodezik ağlarla Deformasyon Analizine Genel Bakış
İ.T.Ü. Dergisi (baskıda)

Heek, B., Kuntz, E. Meier-Hirmer, B. (1977) : Deformationsanalyse mittels relativer fehler - ellipsen
AVN 3/1977 s. 78-87

Krüger, J. (1980) : Matrizenalgebra
in Geodätische Netze in Landes-und Ingenieur-vermessung
Konrad witter Verlag Stutgart 1980

Pelzer, H. (1980)a : Fehlerlehre und Statistik, in
Geodätische Hetze in Landes-und Ingenieur-vermessung
Konrad Witter Verlag Stutgart 1980

Pelzer, H. (1980)b : Beurteilung der Genauigkeit und Zuverlössigkeit geodätischer Netze in
Geodatische Netze in Landes-und Ingenieur vermessung
Konrad Wittwer Verlag Stutgart 1980

Welsch, W. (1981) : Gegenwärtigen stand der geodätischen Analyse und Interpretation geometrischen Deformationen
AVN 2 /1981 S. 45-51

Wolf, H. (1975) : Ausgleichungsrechnung
Formeln zur Praktischen Anwendung
Dümmler Verlag Bonn 1975