ASTROJEODEZİK AĞ DENGELEMESİ İÇİN ÜÇ BOYUTTA BİR FONKSİYONEL MODEL

Y.Müh.Yzb. Hakan SARBANOĞLU

ABSTRACT

All the data collected for geodetic purposes are the quantities which are all in the same three dimensional space and can't be proposed as to be stochastically independent. It is meaningfull to consider these quantities as a whole in three dimensions and to process with integrated systems. So the transformations (either internal or external) between natural and reference coordinate systems can be performed with differential equations expressing the relationships in three dimensional space. The astrogeodetic triangulation network must be set up depending on a common (curvilinear or rectangular) coordinate system. On the other hand, samplings (measurements) are carried out mostly in local systems. The transformations between the local and common three dimensional coordinate elements which are drawn from the same probability space can be performed as a linear least square estimation. Some observed common coordinate elements (astronomical coordinates etc.) must be included in the system, additionally, in order to locate and to oriente the network.

In the classical way, first an ellipsoid is adopted (ellipsoid problem), then comes the problem of the location and orientation of the network (datum problem), measurements are transformed from natural to corresponding reference systems (reductions) and consequently, the coordinates are obtained by means of the adjustment of the network.

In this study, these four steps going after each other are connected and so, a functional model connecting the internal and external adjustments is defined in an integrated system also including the reductions. The result is an observation equation (in matrix form) for horizontal directions, zenith distances and slope distances each having seventeen parameters.

1. GİRİŞ

Üç boyutta konum belirleme problemi, klasik olarak, birbirinden ayrı iki grupta ele alınır: Bir referans yüzeyi üzerinde iki boyutlu konum (yatay kontrol) ve noktanın bu yüzeye olan geometrik ya da potansiyel farklılığı olarak ifade edilmiş uzaklığı (düşey kontrol). Zaman dördüncü boyut olarak gözardı edildiğinde, jeodezik konum belirlemede bilgi sağlayan tüm geometrik ve fiziksel ölçüler aynı üç boyutlu uzaydan örneklenen ve stokastik olarak bağımsızlığı iddia edilemeyen rasgele değişken dizileridir. Bu nedenle bu ölçülerin, bütünleşik sistemlerde hep birlikte işlenmesi daha anlamlı olacaktır.

Diğer bilimlerde de olduğu gibi, jeodezide fiziksel çevreyi (doğal model, fiziksel model) temsil etmek üzere bir model çevre (düşünsel model, referans model) tasarlanır. Doğanın karmaşıklığından ötürü fiziksel modelde işlem yapmak güçtür, oysa referans model zaten fiziksel modeli temsil etmek üzere birtakım matematiksel formülasyonla ifade edilmiştir. Yapılan ölçüler referans modelde işlenir ve sonuçların analizi ile fiziksel modele göre olan çelişkiler ortaya konarak, modelin fonksiyonel ve stokastik bileşenleri giderek geliştirilerek fiziksel çevre ile uyumlu bir referans model elde edilmiş, böylece doğanın özellikleri ortaya konmuş olur.

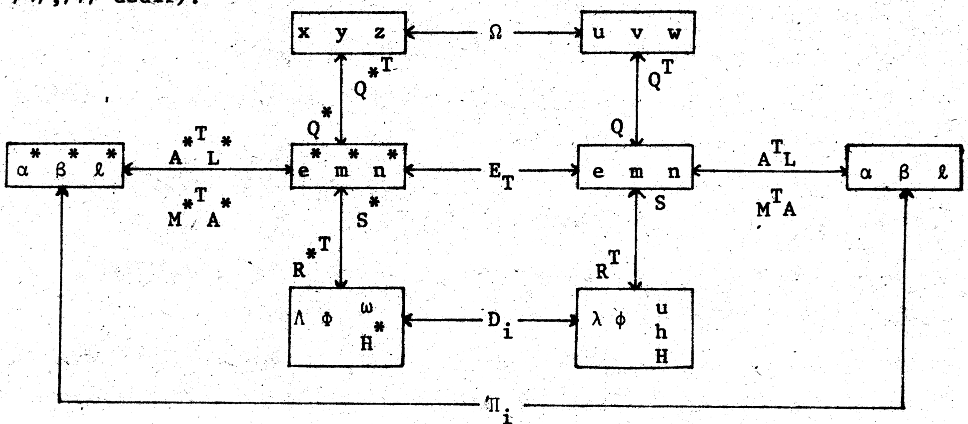
2. KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Jeodezik konum belirleme problemine bu açıdan yaklaşıldığında, koordinat sistemlerini, doğal koordinat sistemleri ve bunları temsil eden modeller olarak referans koordinat sistemleri biçiminde ele almak uygun olur. İlki gerçek dünyada yer alır, elemanları çoğunlukla ölçülebilir ve komplekstir. İkincisi ise soyuttur, matematiksel olarak ifade edilebilir.
Üç boyutta yere bağlı jeodezik koordinat sistemleri Tablo-1 de gösterilmektedir.
Doğal ve referans sistemlerin kendi içlerindeki dönüşümler kapalı fonksiyonlarla becerilebilirler, ancak böylesi eşitlikler her zaman basit ve açık değildir. Bunun yerine doğrusallaştırılmış dönüşümler ve gerekli dönüşüm matrisleri olarak da bir sistemdeki koordinat elemanlarının diğer sistemdeki koordinat elemanlarına göre gradyentlerinden oluşan Jacobian'lar kullanılır. Benzer şekilde, birbirine yakın olarak konumlanmış doğal ve

Koordinat Sistemi			Elemanları	Orijini
DOĞAL	ORTAK	DİK	$(x, y, z)_i^T$	Yeryuvarı ort. ağırlık mer.
		EĞRİ	$(\Lambda, \Phi, W)_i^T$ $(\Lambda, \Phi, H^*)_i^T$	"
	YEREL	DİK	$(e^*, m^*, n^*)_{ij}^T$	i' nci nokta
		KUTUPSAL	$(\alpha^*, \beta^*, \ell^*)_{ij}^T$	"
REFERANS	ORTAK	DİK	$(u, v, w)_i^T$	Yerin standart gravite alanı merkezi
		EĞRİ	$(\lambda, \phi, u)_i^T$ $(\lambda, \phi, h)_i^T$ $(\lambda, \phi, H)_i^T$	Yerin standart gravite alanı merkezi
	YEREL	DİK	$(e, m, n)_{ij}^T$	i' nci nokta
		KUTUPSAL	$(\alpha, \beta, \ell)_{ij}^T$	"

Tablo : 1 Koordinat Sistemleri.

referans sistemlerin birbirine dönüşümü üç boyutta benzerlik dönüşümleri ile yapılabilir. Birbirine karşılık gelen doğal ve referans sistemlerin yakın konumlanmalarının sonucu olarak, sadece birinci derece terimlerle yetinilerek doğrusal dönüşümler kullanılabilir. Değişik koordinat sistemleri arasındaki dönüşümler Tablo-2 de gösterilmiştir.(Terminoloji: /9/, /4/,/7/ dedir).



Tablo : 2 Koordinat sistemleri arasında dönüşümler.

Ω, E_i, D_i ve Π_i dönüşüm matrislerinden herhangi biri belli olduğunda, zincir kuralı uygulanarak diğerleri türetilebilir. /5/, /9/. :

$$\Omega = Q_i^{*T} (I+E_i) Q_i - I \tag{1}$$

$$E_i = Q_i^{*T} (I+\Omega) Q_i^T - I \tag{2}$$

$$E_i = S_i^{*} (I+D_i) R_i^T - I \tag{3}$$

$$D_i = R_i^{*T} (I+E_i) S_i - I \tag{4}$$

$$E_i = A_{ij}^{*T} L_{ij}^{*} (I+\Pi_i) M_{ij}^T A_{ij} - I \tag{5}$$

$$\Pi_i = M_{ij}^{*T} A_{ij}^{*} (I+E_i) A_{ij}^T L_{ij} - I \tag{6}$$

3. FONKSİYONEL MODEL

Astrojeodezik ağların kurulmasında, alışılagelmiş yöntemde şu adımlar izlenir.

a. Referans elipsoidin belirlenmesi,(Elipsoid Problemi)

b. Başlangıç noktasının koordinatlarının ve ikinci bir noktaya olan azimutun (dış parametrelerin) belirlenmesi, (Datum Problemi)

c. Doğal sistemlerde yapılan ölçülerin indirgeme eşitlikleri ile referans sisteme dönüştürülmesi, (İndirgeme)

d. İndirgenmiş ölçülerin en küçük kareler dengelemesi, ağın bütün noktalarının koordinatlarının belirlenmesi, (Dengeleme)

e. Arzu edilirse, ağın şekli korunarak ilk iki adımdaki parametrelerin yeniden belirlenmesi.

Bu makalede, yukarıdaki klasik yaklaşımın ilk dört adımı birleştirilerek, üç boyutta gözlem denklemleri tüm adımlardaki parametrelerin fonksiyonu olarak ifade edilmiştir.

3.1. KOORDİNATLARIN DEĞİŞİMİ

Üç boyutlu öklid uzayında, iki noktayı birleştiren doğru boyunca vektörel eğrilik sıfırdır. Bu nedenle böylesi bir doğru parçası bir jeodezik eğridir ve gözlem denklemlerinin çıkarılmasında kullanılabilir. Bu doğru parçası aynı zamanda :

$$(N_i+h_i)\ \mathrm{Cos}\ \phi_i\ \mathrm{Sin}\ \alpha_{ij} = \text{sabit} \tag{7}$$

biçimindeki Clairout denklemini de sağlar. /7/

Yerel kutupsal koordinatlar ele alınırsa :

$$\alpha_{ij} = \alpha\ (\lambda_j\ ,\ \phi_j\ ,\ h_j\ ,\ \lambda_i\ ,\ \phi_i\ ,\ h_i)$$

$$\beta_{ij} = \beta\ (\lambda_j\ ,\ \phi_j\ ,\ h_j\ ,\ \lambda_i\ ,\ \phi_i\ ,\ h_i)$$

$$\ell_{ij} = \ell\ (\lambda_j\ ,\ \phi_j\ ,\ h_j\ ,\ \lambda_i\ ,\ \phi_i\ ,\ h_i) \tag{8}$$

Taylor seri açınımı ile doğrusallaştırılırsa :

$$\underline{\alpha}_{ij} = \underline{\alpha}^{o}_{ij} + C'_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} \tag{9}$$

Burada

$$\underline{\alpha}_{ij} = (\alpha,\beta,\ell)^{T}_{ij}$$

$$\underline{\alpha}^{o}_{ij} = (\alpha,\beta,\ell)^{oT}_{ij}$$

$$\underline{\delta\lambda}_{ij} = (\delta\lambda_j,\delta\phi_j,\delta h_j,\delta\lambda_i,\delta\phi_i,\delta h_i)^{T}$$

C'_{ij} = elemanları, $\underline{\alpha}_{ij}$ nin elemanlarının $\underline{\delta\lambda}_{ij}$ nin elemanlarına göre gradyentlerinden oluşan dönüşüm matrisidir.

C' nin elemanları (8) eşitliklerinin kısmi türevlemeleri ile elde edilir. (9) eşitliklerinin sol tarafı örneklenen rasgele değişkenlerin umut değerleridir. Bu büyüklükler doğal sistemlerde gözlenmiştir ve hatasız bile olsalar (9) eşitliklerinde kullanılabilmeleri için ilgili referans sisteme dönüştürülmelidirler. Başka bir deyişle, bu ölçülmüş büyüklükler (8) eşitliklerinin gereği olan fonksiyonel modelle (dolayısıyla türetilecek olan C' matrisi ile) uyumlu olmalıdır. Bu nedenle ölçülerin yapıldığı doğal sistem ve fonksiyonel modelin kurulacağı referans sistem gözönüne alınarak bir indirgeme modeli geliştirilir. İndirgeme miktarları $\underline{dr}_{\alpha_{ij}}$ vektöründe toplanırsa (9) eşitlikleri şu biçimi alır :

$$\underline{\alpha}^*_{ij} + \underline{dr}_{\alpha_{ij}} = \underline{\alpha}^o_{ij} + C'_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} \qquad (10)$$

Aslında $dr_{\alpha_{ij}}$ de gözlem doğrusunun iki uç noktasının, yani bilinmeyen parametrelerin fonksiyonudur. Başlangıçta tam olarak bilinemez. Taylor seri açının ile :

$$\underline{dr}_{\alpha_{ij}} = \underline{dr}_{\alpha_{ij}}^{\,o} + C''_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} \qquad (11)$$

(11), (10) da yerine konursa :

$$\underline{\alpha}^*_{ij} + \underline{dr}_{\alpha_{ij}}^{\,o} + C''_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} = \underline{\alpha}^o_{ij} + C'_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} \qquad (12)$$

Üç boyutta indirgeme modeli gözönüne alınırsa artık :

$\delta\lambda_{ij} = (\delta\lambda_j, \delta\phi_j, \delta h_j, \delta\lambda_i, \delta\phi_i, \delta h_i, \delta\Lambda_i, \delta\Phi_i)^T$ dir.

(12) eşitliklerinin birincisinde özel bir durum söz konusudur. Eğer ölçülmüş doğrultu r_{ij} ve yöneltme bilinmeyeni t_i gözönüne alınırsa :

$$\alpha^*_{ij} = r_{ij} + t_i \qquad (13)$$

(12) de yerine konursa

$$\underline{\tilde{L}}_{\alpha_{ij}} + t_i(1,0,0,)^T + \underline{dr}^o_{\alpha_{ij}} + C''_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} = \underline{\alpha}^o_{ij} + C'_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} \qquad (14)$$

burada

$\underline{\tilde{L}}_{\alpha_{ij}} = (r, \overset{*}{\beta}, \overset{*}{\ell})^T_{ij}$ gözlenmiş koordinat elemanlarının umut değerleri vektörüdür.

Ölçülere dengeleme ile getirilecek düzeltmeler ele alınırsa :

$$\underline{L}_{\alpha_{ij}} + \underline{v}'_{\alpha_{ij}} + t_i(1,0,0)^T + \underline{dr}^o_{\alpha_{ij}} + C''_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} = \underline{\alpha}^o_{ij} + C'_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_{ij} \qquad (15)$$

burada :

$\underline{L}_{ij} = (L_r\ ,\ L_{\beta *},\ L_{\ell *})^T$ gözlem vektörü

$\underline{v}'_{\alpha_{ij}} = (v'_r\ ,\ v'_{\beta *},\ v'_{\ell *})^T$ düzeltmelerdir.

Yatay gözlem grubundaki yaklaşık yöneltme bilinmeyeni ;

$$t^o_i = \frac{[\ r-t\ ]_{ij}}{s_i} \qquad (16)$$

S_i : doğrultu sayısı

ve

$$t_i = t^o_i + \delta t_i \quad \text{dir.} \qquad (17)$$

(15) yeniden düzenlenirse :

$$\underline{v}'_{\alpha_{ij}} = -\underline{\ell}_{\alpha_{ij}} + C_{ij}\underline{\delta\lambda}_{ij} - \delta t_i(1,0,0)^T \qquad (18)$$

burada

$-\ell_{ij} = \alpha^o_{ij} - L_{\alpha_{ij}} - dr^o_{ij} - t^o_i\ (1,0,0)^T$ ve

$C_{ij} = (C' - C'')_{ij}$

(18) eşitlikleri, dolaylı ölçüler dengelemesine esas olan düzeltme denklemlerdir. Ancak her yatay gözlem grubu için yöneltme bilinmeyeni bu gruba ait ağırlık matrisinin değiştirilmesi ile elemine edilebilir./1/.

Yatay gözlem grubuna ait düzeltmeler :

$v'_{r_1}\ ,\ v'_{r_2 1}$ -----------v'_{s_i}

ve bunlara ait ağırlık matrisi

$$P_i' = m_o^2 \, \Sigma_{rr}^{-1} \tag{19}$$

ele alındığında bu ağırlık matrisi yerine :

$$P_i = P_i' - \frac{P_i' \, \underline{e} \, \underline{e}^T \, P_i'}{\underline{e}^T \, P_i' \, \underline{e}} \, , \tag{20}$$

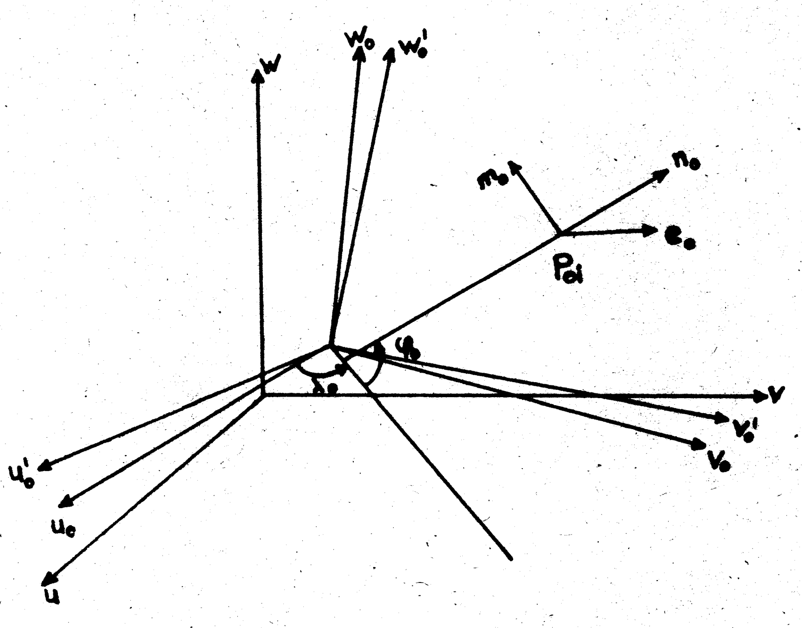
kullanılırsa, yeni bir ek düzeltme denklemi eklenmesine veya C_{ij} katsayılarının değişmesine gerek kalmaksızın yöneltme bilinmeyeni elemine edilmiş olur.

Bu yeni ağırlık matrisi ile kullanılan düzeltme denklemleri :

$$\underline{v}_{\alpha_{ij}} = -\underline{\ell}_{\alpha_{ij}} + C_{ij} \, \underline{\delta\lambda}_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1 \, \ldots\ldots\ldots\ldots \, n \\ j = 1 \, \ldots\ldots\ldots\ldots \, s_i \end{matrix} \tag{21}$$

astrojeodezik ağ dengelemesinin fonksiyonel modelini oluşturur.

3.2. GÖZLEM DENKLEMİ



ŞEKİL : 1

Yalnızca referans koordinatlar ele alındığında, bir P_i noktası için bir $(\lambda,\phi,h)_i^o$ yaklaşık koordinat takımı seçmekle, $(e,m,n)^o$ yerel dik koordinat sistemi, $(u,v,w)^o$ ortak dik koordinat sistemine göre tanımlanmış olur. Bu noktadaki ölçülerin dengelemeye girmesi ile de ağ, uzayda bu noktaya göre konumlanmış ve yönlenmiş olur. Aynı şey diğer noktalar (P_j , P_k.....) için de geçerlidir. Başka bir deyişle dengelemeye giren ölçüler, ayrı ayrı referans koordinat sistemlerine (u_i , v_i , w_i , i=1 .... n) aittirler. İç dengeleme ile, her nokta için seçilen yaklaşık koordinatlar homojen bir referans sisteme (u_o , v_o , w_o) dönüştürülürler. İç dengelemenin parametreleri λ_j , ϕ_j , h_j , λ_i , ϕ_i , h_i , a ve f dir. Daha sonra bu ortak sistem, benzerlik dönüşümü ile istenen diğer bir ortak sisteme dönüştürülür. Bu dönüşüm üçü dönüklük, üçü kayıklık ve biri de ölçek olmak üzere yedi parametre içerir ve dış dengeleme olarak adlandırılır. /7/.

Bu kavram şöyle de gösterilebilir.

$$\underline{\alpha}_{ij} = \underline{\alpha}_{ij}^{o} + \overset{①}{\underline{\delta\alpha}_{ij}} + \overset{②}{\underline{\delta\alpha}_{ij}} \tag{22}$$

Düzeltme denklemlerinin türetileceği gözlem denklemlerinin kurulmasında, ağ dengelemesinin sözü edilen üç adımının birleştirilmesinde (elipsoid ve datum problemleri, indirgemeler) (=bütünleşik iç ve dış dengeleme) bu prensipten yararlanılabilir.

3.2.1. İNDİRGEME MODELİ

Bir P_i noktasının homojen referans sistemindeki konum vektörü

$$\underline{U}_i = (u,v,w)_i^T \tag{23}$$

ile doğal koordinat sistemindeki konum vektörü

$$\underline{X}_i = (X,Y,Z)_i^T \tag{24}$$

arasındaki fark vektörü :

$$\underline{\delta X}_i = (X-u,\ Y-v,\ Z-w)_i^T = (\delta X,\delta Y,\delta Z)_i^T \text{ dir.} \tag{25}$$

Bu vektörün referans ortak eğri koordinatlara göre gradyentleri ele alınırsa /4/.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta X)}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial(\delta X)}{\partial\phi_i} & \frac{\partial(\delta X)}{\partial h_i} \\ \frac{\partial(\delta Y)}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial(\delta Y)}{\partial\phi_i} & \frac{\partial(\delta Y)}{\partial h_i} \\ \frac{\partial(\delta Z)}{\partial\lambda_i} & \frac{(\delta Z)}{\partial\phi_i} & \frac{(\delta Z)}{\partial h_i} \end{bmatrix} = \Omega\, Q_i^T\, S_i \tag{26}$$

(3) , (1) de yerine konursa şu eşitlik elde edilir :

$$\Omega = Q_i^{*T}\, S_i^{*}\, (I + D_i)\, R_i^T\, Q_i - I \tag{27}$$

Sağ taraf Taylor seri açınımı yardımıyla doğrusallaştırılırsa ;

$$\Omega\, Q_i^T\, S_i = (\delta Q_i^T\, Q_i + Q_i^T\, \delta S_i\, R_i^T\, Q_i + Q_i^T\, S_i D_i R_i^T Q_i) Q_i^T\, S_i \tag{28}$$

elde edilir. (3) kullanılarak :

$$\Omega\, Q_i^T\, S_i = (\delta Q_i^T Q_i + Q_i^T\, E_i\, Q_i) Q_i^T\, S_i \tag{29}$$

elde edilir. Bu eşitlik aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir :

$$\Omega\, Q_i^T\, S_i = Q_i^T\, B_i\, S_i \tag{30}$$

Buradan ;

$$\Omega = Q_i^T\, B_i\, Q_i \tag{31}$$

Eşitlikteki B_i matrisi

$$B_i = Q_i\, \delta Q_i^T + E_i \tag{32}$$

olmalıdır.

Burada :

$$Q_i\ \delta Q_i^T = \begin{bmatrix} 0 & -(\Lambda_i-\lambda_i)\ \mathrm{Sin}\ \Phi_i & (\Lambda_i-\lambda_i)\ \mathrm{Cos}\ \Phi_i \\ (\Lambda_i-\lambda_i)\ \mathrm{Sin}\ \Phi_i & 0 & (\Phi_i-\phi_i) \\ -(\Lambda_i-\lambda_i)\ \mathrm{Cos}\ \Phi_i & -(\Phi_i-\phi_i) & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

E_i matrisi ise, doğal ve referans dik koordinat sistemleri arasındaki benzerlik dönüşümünde Taylor seri açınımı ile doğrusallaştırma ve belli trigonometrik yaklaşımlarla şu şekilde ifade edilebilir :

$$E_i = \begin{bmatrix} \Delta & \varepsilon_n & -\varepsilon_m \\ -\varepsilon_n & \Delta & \varepsilon_e \\ \varepsilon_m & -\varepsilon_e & \Delta \end{bmatrix}_i \tag{34}$$

E_i matrisi böylesi dönüklükler yerine ölçülebilen büyüklükler cinsinden de ifade edilebilir. (5) eşitliklerinin sağ tarafı

$$E = A^{*T}\ L^*\ (I+\Pi)\ M^T\ A - I \tag{35}$$

Taylor seri açınımı yardımıyla doğrusallaştırılırsa

$$E = A^T\ L\ (M^T\ \delta L + M^T\ A\delta A^T\ L + \Pi)\ M^T\ A \tag{36}$$

Gerekli matris işlemleri yapıldığında şu sonuca ulaşılır :

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\delta \ell^*}{\ell} & \left[\delta\alpha^* - \frac{\partial(\delta\beta^*)}{\partial\alpha}\ \mathrm{Cot}\ \beta\right] & \left[\delta\beta^*\ \mathrm{Sin}\ \alpha + \frac{\partial(\delta\beta^*)}{\partial\alpha}\mathrm{Cos}\ \alpha\right] \\ \left[-\delta\alpha^* + \frac{\partial(\delta\beta^*)}{\partial\alpha}\mathrm{Cot}\ \beta\right] & \frac{\delta\ell^*}{\ell^*} & \left[\delta\beta^*\ \mathrm{Cos}\ \alpha - \frac{\partial(\delta\beta^*)}{\partial\alpha}\mathrm{Sin}\ \alpha\right] \\ \left[-\delta\beta^*\ \mathrm{Sin}\ \alpha - \frac{\partial(\delta\beta^*)}{\partial\alpha}\mathrm{Cos}\ \alpha\right] & \left[-\delta\beta^*\mathrm{Cos}\alpha + \frac{\partial(\delta\beta^*)}{\partial\alpha}\mathrm{Sin}\alpha\right] & \frac{\delta\ell^*}{\ell^*} \end{bmatrix} \tag{37}$$

(37) ve (33), (32) de yerine konursa B ölçülebilir elemanlarla ifade edilebilir :

$$B = \begin{bmatrix} \Delta & [\Psi - \nu \text{ Cot } \beta] & [\mu \text{ Sin } \alpha + \nu \text{ Cos } \alpha] \\ [-\Psi + \nu \text{ Cot } \beta] & \Delta & [\mu \text{ Cos } \alpha + \nu \text{ Sin } \alpha] \\ [-\mu \text{ Sin } \alpha - \nu \text{ Cos } \alpha] & [-\mu \text{ Cos}\alpha + \nu \text{ Sin } \alpha] & \Delta \end{bmatrix} \tag{38}$$

Burada /4/ , /5/ :

$$\Psi = (\alpha^* - \alpha) - (\Lambda - \lambda) \text{ Sin } \phi + \left[(\Lambda - \lambda) \text{ Cos } \phi \text{ Cos } \alpha - (\Phi - \phi) \text{ Sin } \alpha\right] \text{ Cot } \beta$$

$$\mu = (\beta^* - \beta) + (\Lambda - \lambda) \text{ Cos } \phi \text{ Sin } \alpha + (\Phi - \phi) \text{ Cos } \alpha \tag{39}$$

$$\nu = \frac{\partial(\beta^* - \beta)}{\partial \alpha} + (\Lambda - \lambda) \text{ Cos } \phi \text{ Cos } \alpha - (\Phi - \phi) \text{ Sin } \alpha$$

veya

$$\nu = \frac{\partial(\alpha^* - \alpha)}{\partial \beta} \text{ Sin}^2 \beta + (\Lambda - \lambda) \text{ Cos } \phi \text{ Cos } \alpha - (\Phi - \phi) \text{ Sin } \alpha$$

Arzu edilirse bu büyüklükler başka bir biçimde de ifade edilebilir. Doğal ve referans ortak dik koordinat sistemleri arasındaki benzerlik dönüşümünde, yeterli yaklaşımlarla, dönüşüm matrisi Ω şu şekilde verilebilir.

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Delta & \omega_w & -\omega_v \\ -\omega_w & \Delta & \omega_u \\ \omega_v & -\omega_u & \Delta \end{bmatrix} \tag{40}$$

burada : ω lar ilgili eksen etrafındaki dönüklüklerdir, Δ ise ölçek faktörünün birimden olan farkıdır. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{Sin}\alpha \text{ Cot}\beta & -\text{Cos}\alpha \text{ Cot}\beta & 1 \\ \text{Cos}\alpha & -\text{Sin}\alpha & 0 \\ -\text{Sin}\alpha & \text{Cos}\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Sin}\lambda & \text{Cos}\lambda & 0 \\ -\text{Sin}\phi \text{ Cos}\lambda & \text{Sin}\phi \text{ Sin}\lambda & \text{Cos}\phi \\ \text{Cos}\phi \text{ Cos}\lambda & \text{Cos}\phi \text{ Sin}\lambda & \text{Sin}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{bmatrix}$$

eşitliği geçerlidir. /4/. (41)

Açıkça görüldüğü gibi (38) eşitliklerinden elde edilen B_i matrisi dış dengeleme parametrelerini kontrol altında tutmaktadır. Bu nedenle üç boyutta, datum parametrelerini ve indirgemeleri de içeren bir fonksiyonel model için (8) eşitliklerinin türetilmesinde kullanılabilir. Diğer bir deyişle, B_i matrisleri ağın her noktasında datum ve indirgeme problemlerini kontrol altında tutacak zorlayıcı koşulları (constraint) sağlarlar. Öyleyse (39) eşitlikleri, jeodezik eğriyi parametreler cinsinden ifade etmek için kullanılacak fonksiyonel modelin temelini oluşturur.

(39) dan :

$$\alpha_{ij} = \alpha^*_{ij} - (\Lambda_i - \lambda_i) \operatorname{Sin} \phi_i + \left[(\Lambda_i - \lambda_i) \operatorname{Cos} \phi_i \operatorname{Cos} \alpha_{ij} - (\Phi_i - \phi_i) \operatorname{Sin} \alpha_{ij}\right] \operatorname{Cot} \beta_{ij} - \Psi_i$$

$$\beta_{ij} = \beta^*_{ij} - (\Lambda_i - \lambda_i) \operatorname{Cos} \phi_i \operatorname{Sin} \alpha_{ij} + (\Phi_i - \phi_i) \operatorname{Cos} \alpha_{ij} - \mu_i \qquad (42)$$

ve

$$\ell_{ij} = (1+\Delta)\, \ell^*_{ij} = \left(1 + \frac{\delta\ell^*}{\ell^*}\right) \ell^*_{ij}$$

elde edilir.

İdealde, sözü edilen homojen referens sistemi (u_o, v_o, w_o) ile doğal sistem (X,Y,Z) nin özdeş olmaları istenir. Bu da her iki sistemin eksenlerinin birbirine paralel ve ölçek faktörünün birim olmasını gerektirir. Bu ancak Ω nın sıfır olması ile mümkündür. Ω matrisinin sıfır olabilmesi için (31) eşitliğinden de görüldüğü gibi ağın tüm noktalarında B_i matrislerinin sıfır olması gerekir. Eğer $(\alpha\ \beta\ \ell)$ fonksiyonları B_i matrislerinden elde edilirse diğer bir deyişle, ölçülen $(\alpha^*\ \beta^*\ \ell^*)$büyüklüklerinin referans sistemdeki karşılıkları olan $(\alpha\ \beta\ \ell)$ ye indirgemelerinde $\underline{dr}_{\alpha ij}$ indirgeme vektörünün elemanları B_i matrislerinden türetilirse, B_i matrislerinin sıfır yapılması ile indirgemenin yanısıra doğal ve referans sistemlerin özdeş olmaları da sağlanmış olur.

B_i nin sıfır olması için, (32) eşitliğinden :

$$Q_i\ \delta Q_i^T = -\,E_i \qquad (43)$$

veya (38) eşitliği kullanılarak :

$$\Psi = \mu = \nu = 0 \tag{44}$$

Böylece (44) eşitlikleri sağlandığında :

$$\omega_u = \omega_v = \omega_w = 0$$

eşitliklerinin de sağlanmış olacağı (41) de görülmektedir.

(44) , (42) de yerine konduğunda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\alpha_{ij} = \alpha^*_{ij} - (\Lambda_i-\lambda_i)\ \mathrm{Sin}\ \phi_i + \left[(\Lambda_i-\lambda_i)\mathrm{Cos}\ \phi_i\ \mathrm{Cos}\ \alpha_{ij} - (\Phi_i-\phi_i)\mathrm{Sin}\ \alpha_{ij}\right]\ \mathrm{Cot}\ \beta_{ij}$$

$$\beta_{ij} = \beta^*_{ij} + (\Lambda_i-\lambda_i)\ \mathrm{Cos}\ \phi_i\ \mathrm{Sin}\ \alpha_{ij} + (\Phi_i-\phi_i)\ \mathrm{Cos}\ \alpha_{ij}$$

$$\ell_{ij} = \ell^*_{ij} \tag{45}$$

Bu eşitlikler, (10) eşitlikleri ile aynıdır :

$$\underline{\alpha}_{ij} = \underline{\alpha}^*_{ij} + \underline{dr}_{\alpha ij} \tag{46}$$

Burada ;

$$\underline{\alpha}_{ij} = (\alpha,\beta,\ell)^T_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha\ (\lambda_j,\phi_j,h_j,\lambda_i,\phi_i,h_i,a,f) \\ \beta\ (\lambda_j,\phi_j,h_j,\lambda_i,\phi_i,h_i,a,f) \\ \ell\ (\lambda_j,\phi_j,h_j,\lambda_i,\phi_i,h_i,a,f) \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$\underline{\alpha}^*_{ij} = (\alpha^*,\beta^*,\ell^*)^T_{ij} \qquad \text{gözlem vektörü} \tag{48}$$

$$\underline{dr}_{\alpha ij} = (dr_\alpha,dr_\beta,dr_\ell)^T_{ij} = \begin{bmatrix} -(\Lambda_i-\lambda_i)\mathrm{Sin}\phi_i + \left[(\Lambda_i-\lambda_i)\mathrm{Cos}\phi_i\mathrm{Cos}\alpha_{ij} - (\Phi_i-\phi_i)\mathrm{Sin}\alpha_{ij}\right]\ \mathrm{Cot}\beta_{ij} \\ (\Lambda_i-\lambda_i)\mathrm{Cos}\phi_i\mathrm{Sin}\alpha_{ij} + (\Phi_i-\phi_i)\mathrm{Cos}\alpha_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$\underline{dr}_{\alpha ij}$: gözlem vektörünü (45) ile oluşturulan referans modele indirgeyen vektör.

(9) eşitlikleri (11) ile birlikte (46) da yerine konursa :

$$\underline{\alpha}^{o}_{ij} + C'_{ij}\,\underline{\delta\lambda}_{ij} = \underline{\alpha}^{*}_{ij} + \underline{dr}^{o}_{\alpha ij} + C''_{ij}\,\underline{\delta\lambda}_{ij} \tag{50}$$

burada ;

$$C'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_j} & \frac{\partial\alpha}{\partial\phi_j} & \frac{\partial\alpha}{\partial h_j} & \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial\alpha}{\partial\phi_i} & \frac{\partial\alpha}{\partial h_i} & \frac{\partial\alpha}{\partial a} & \frac{\partial\alpha}{\partial f} & \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_o} & \frac{\partial\alpha}{\partial\phi_o} & \frac{\partial\alpha}{\partial h_o} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon_{e_o}} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon_{m_o}} & \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon_{r_o}} & \frac{\partial\alpha}{\partial\Delta} \\ \frac{\partial\beta}{\partial\lambda_j} & \frac{\partial\beta}{\partial\phi_j} & \frac{\partial\beta}{\partial h_j} & \frac{\partial\beta}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial\beta}{\partial\phi_i} & \frac{\partial\beta}{\partial h_i} & \frac{\partial\beta}{\partial a} & \frac{\partial\beta}{\partial f} & \frac{\partial\beta}{\partial\lambda_o} & \frac{\partial\beta}{\partial\phi_o} & \frac{\partial\beta}{\partial h_o} & \frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon_{e_o}} & \frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon_{m_o}} & \frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon_{r_o}} & \frac{\partial\beta}{\partial\Delta} \\ \frac{\partial\ell}{\partial\lambda_j} & \frac{\partial\ell}{\partial\phi_j} & \frac{\partial\ell}{\partial h_j} & \frac{\partial\ell}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial\ell}{\partial\phi_i} & \frac{\partial\ell}{\partial h_i} & \frac{\partial\ell}{\partial a} & \frac{\partial\ell}{\partial f} & \frac{\partial\ell}{\partial\lambda_o} & \frac{\partial\ell}{\partial\phi_o} & \frac{\partial\ell}{\partial h_o} & \frac{\partial\ell}{\partial\varepsilon_{e_o}} & \frac{\partial\ell}{\partial\varepsilon_{m_o}} & \frac{\partial\ell}{\varepsilon_{r_o}} & \frac{\partial\ell}{\partial\Delta} \end{bmatrix}$$

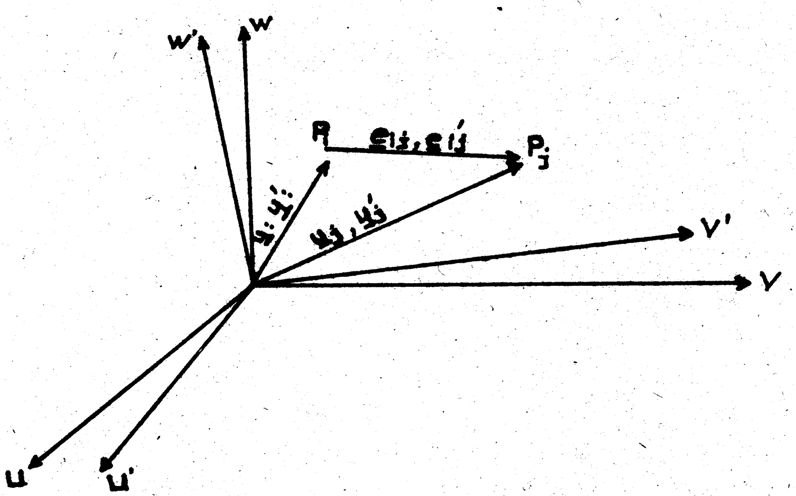
ve,

$$C''_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial dr_\alpha}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial dr_\alpha}{\partial\phi_i} & \frac{\partial dr_\alpha}{\partial\Lambda_i} & \frac{\partial dr_\alpha}{\partial\Phi_i} \\ \frac{\partial dr_\beta}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial dr_\beta}{\partial\phi_i} & \frac{\partial dr_\beta}{\partial\Lambda_i} & \frac{\partial dr_\beta}{\partial\Phi_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\underline{\delta\lambda}_{ij} = (\delta\lambda_j, \delta\phi_j, \delta h_j, \delta\lambda_i, \delta\phi_i, \delta h_i, \delta a, \delta f, \delta\lambda_o, \delta\phi_o, \delta h_o, \delta\varepsilon_{e_o}, \delta\varepsilon_{m_o}, \delta\varepsilon_{n_o}, \delta\Lambda, \delta\eta_i, \delta\xi_i)^T \tag{51}$$

3.2.2. C' MATRISİNİN BELİRLENMESİ



ŞEKİL : 2

$$\underline{e}_{ij} = Q_i(\underline{U}_j - \underline{U}_i) = Q_i\ \underline{\Delta U}_{ij} \tag{52}$$

$$\underline{e}'_{ij} = Q'_i(\underline{U}'_j - \underline{U}'_i) = Q'_i\ \underline{\Delta U}'_{ij} \tag{53}$$

Dengeleme ile $\underline{e}'_{ij}$ elde edilecektir. Bu nedenle :

$$\underline{e}'_{ij} = \underline{e}_{ij} + \underline{\delta e}'_{ij} \tag{54}$$

biçiminde ele alınabilir. Burada ;

$\underline{e}_{ij}$: Homojen referans sistemdeki vektör.

$\underline{e}'_{ij}$: Diğer bir referans (veya doğal) sistemdeki vektör.

$\underline{\delta e}'_{ij}$: $\underline{e}_{ij}$ vektörünü, noktaların biçimini koruyarak (üç boyutta benzeşim dönüşümü) $\underline{e}'_{ij}$ vektörüne dönüştüren fark vektörüdür.

(52) nin türevlenmesi ile :

$$\underline{de}_{ij} = dQ_i\ (\underline{U}_j - \underline{U}_i) + Q_i\ (\underline{dU}_j - \underline{dU}_i) \tag{55}$$

Bu eşitlikte bulunması gerekli fonksiyonel parametreler durulan ve bakılan noktaya ait üç boyutlu koordinatların değişimidir. (6 parametre). Fakat (54) eşitliği şu biçimde düşünülürse :

$$\underline{e}'_{ij} = \underline{e}^{o}_{ij} + \underline{\delta e}_{ij} + \underline{\delta e}'_{ij} \tag{56}$$

(55) eşitliği de iki parça halinde düşünülebilir.

$$\underline{de}_{ij} = \underline{de}^{①}_{ij} + \underline{de}^{②}_{ij} \tag{57}$$

burada :

$\underline{de}^{①}_{ij}$: Yaklaşık koordinatlara bağlı olarak konumlanıp yönlenmiş heterojen referans sistemleri ortak bir homojen referans sisteme dönüştüren diferansiyel vektör. $\underline{\delta e}_{ij}$ fark vektörünü yansıtır. Altı fonksiyonel parametresi vardır ve ağın iç şeklini sağlar.

$\underline{de}^{②}_{ij}$: Homojen referans sistemdeki ağı diğer bir referans (veya doğal) sisteme dönüştüren diferansiyel vektör. Üç boyutta benzerlik dönüşümünün gerektirdiği yedi parametresi vardır. Eğer elipsoid parametreleri de değişken olarak alınırsa toplam dokuz parametre olacaktır.

(57) ve (55) birlikte düşünülürse ;

$$\begin{aligned} \underline{de}_{ij} &= dQ^{①}_i\ \underline{\Delta U}_{ij} + Q_i(\underline{dU}^{①}_j - \underline{dU}^{①}_i) \\ &+ dQ^{②}_i\ \underline{\Delta U}_{ij} + Q_i(\underline{dU}^{②}_j - \underline{dU}^{②}_i) \end{aligned} \tag{58}$$

3.2.2.1. KONUM PARAMETRELERİ İLE İLGİLİ TERİMLER (İÇ DENGELEME TERİMLERİ)

$\underline{\alpha}_{ij}$ ve $\underline{e}_{ij}$ arasındaki

$$\underline{de}_{ij} = A_{ij}^{T} \; L_{ij} \; \underline{d\alpha}_{ij}$$

Bağıntısı ele alınırsa (bkz. Tablo-1) :

$$A_{ij}^{T} \; L_{ij} \; \underline{d\alpha}_{ij}^{①} = dQ_{i}^{①} \; \underline{\Delta U}_{ij} + Q_{i} \; (\underline{dU}_{j}^{①} - \underline{dU}_{i}^{①}) \tag{59}$$

Parametre vektörü :

$$\underline{\delta\lambda}_{ij} = (\delta\lambda_{j}, \delta\phi_{j}, \delta h_{j}, \delta\lambda_{i}, \delta\phi_{i}, \delta h_{i})^{T}$$

biçiminde yeniden yazılırsa; şu eşitlikler yazılabilir :

$$\underline{dU}_{j}^{①} = Q_{j}^{T} \; S_{j} \; \underline{\delta\lambda}_{j} \qquad \underline{dU}_{i}^{①} = Q_{i}^{T} \; S_{i} \; \underline{\delta\lambda}_{i} \tag{60}$$

$$dQ_{i} = \frac{\partial Q_{i}}{\partial \lambda_{i}} \; \delta\lambda_{i} + \frac{\partial Q_{i}}{\partial \phi_{i}} \; \delta\phi_{i}$$

$$dQ_{i}^{①} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Sin}\phi\delta\lambda & -\mathrm{Cos}\phi\delta\lambda \\ -\mathrm{Sin}\phi\delta\lambda & 0 & -\delta\phi \\ \mathrm{Cos}\phi\delta\lambda & \delta\phi & 0 \end{bmatrix} Q_{i} \tag{61}$$

$$dQ_{i}^{①} = K^{①} \; Q_{i} = -Q_{i}^{T} \; K^{①} \tag{62}$$

(62) ve (60), (59) da yerine konursa :

$$A_{ij}^{T} \; L_{ij} \; \underline{d\alpha}_{ij}^{①} = Q_{i}^{T} \; K^{①} \; \underline{\Delta U}_{ij} + Q_{i} \; (Q_{j}^{T} \; S_{j} \; \underline{\delta\lambda}_{j} - Q_{i}^{T} \; S_{i} \; \underline{\delta\lambda}_{i}) \tag{63}$$

elde edilir.

Parametreleri K_i matrisinden ayırabilmek amacıyla :

$$K^{1}\,\Delta U_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Sin}\phi\delta\lambda & \mathrm{Cos}\phi\delta\lambda \\ -\mathrm{Sin}\phi\delta\lambda & 0 & -\delta\phi \\ \mathrm{Cos}\phi\delta\lambda & \delta\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{ij} \\ \Delta v_{ij} \\ \Delta w_{ij} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta v_{ij}\ \mathrm{Sin}\phi_i - \Delta w\ \mathrm{Cos}\phi_i & 0 & 0 \\ -\Delta u_{ij}\ \mathrm{Sin}\phi_i & -\Delta w_{ij} & 0 \\ \Delta u_{ij}\ \mathrm{Cos}\phi_i & \Delta v_{ij} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\lambda_i \\ \delta\phi_i \\ \delta h_i \end{bmatrix}$$

G_{ij} denirse

$$K^{1}\,\underline{\Delta U}_{ij} = G_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_i^{1} \tag{64}$$

Yerine konursa

$$\underline{d\alpha}_{ij}^{1} = M_{ij}^T\ A_{ij}\ \left[-Q_i^T\ G_{ij}\ \underline{\delta\lambda}_i + Q_i\ Q_j^T\ S_j\ \underline{\delta\lambda}_j - S_i\ \underline{\delta\lambda}_i\right]$$

$$\underline{d\alpha}_{ij}^{1} = M_{ij}^T\ A_{ij}\ \left[Q_i\ Q_j^T\ S_j\ \underline{\delta\lambda}_j - (S_i + Q_i^T\ G_{ij})\ \underline{\delta\lambda}_i\right] \tag{65}$$

elde edilir.

3.2.2.2. DATUM VE ELİPSOİD PARAMETRELERİ İLE İLGİLİ TERİMLER (DIŞ DENGELEME TERİMLERİ)

$$\underline{de}_{ij}^{2} = A_{ij}^T\ L_{ij}\ \underline{d\alpha}_{ij}^{2} = dQ_i^{2}\ \underline{\Delta U}_{ij} + (\underline{dU}_j^{2} - \underline{dU}_i^{2})$$

KONUM VEKTÖRÜ $\underline{U}$ NUN DİFERANSİYELLERİ

Bir P_i noktası için üç boyutta benzeşim eşitliği olarak /3 sf.8/

$$\underline{U}_i' = \underline{U}^{orj} + (1+\Delta)\ (I+\Omega)\ \underline{U}_i \tag{66}$$

yazılabilir.

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde doğrusallaştırılabilir.

$$\delta\underline{U}_i = \underline{U}^{orj} + \Delta\,\underline{U}_i + \Omega\,\underline{U}_i = \underline{U}_i' - \underline{U}_i \qquad (67)$$

ve şu şekilde yazılabilir :

$$d\underline{U}_i = \underline{U}^{orj} + \Delta\underline{U}_i + U_i\,\underline{\omega}_u \qquad (68)$$

burada :

$$\underline{U}^{orj} = (u,v,w)^T_{orijin}$$

$$\underline{U}_i = (u,v,w)^T_i$$

$$\underline{\omega}_u = (\omega_u,\omega_v,\omega_w)^T$$

ve

$$U_i = \begin{bmatrix} 0 & -w_i & v_i \\ w_i & 0 & -u_i \\ -v_i & u_i & 0 \end{bmatrix}$$

Benzer olarak :

$$d\underline{e}_{ij} = \Delta\,\underline{e}_{ij} + E_{ij}\,\underline{\varepsilon}_{e_i} \qquad (69)$$

eşitliği yazılabilir. Burada :

$$\underline{e}_{ij} = (e,m,n)^T_{ij}$$

$$\underline{\varepsilon}_{e_i} = (\varepsilon_e,\varepsilon_m,\varepsilon_n)^T_i$$

ve

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -n_{ij} & m_{ij} \\ n_{ij} & 0 & -e_{ij} \\ -m_{ij} & e_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan, Şekil-2 den :

$$\underline{e}_{oi} = Q_o \, (\underline{U}_i - \underline{U}_o) \tag{70}$$

Buradan :

$$\underline{U}_i = \underline{U}_o + Q_o^T \, \underline{e}_{oi} \tag{71}$$

elde edilir. (69), $\underline{de}_{oi}$ için (71) de yerine konursa :

$$\underline{dU}_i = \underline{dU}_o + \underline{dQ}_o^T \, \underline{e}_{oi} + Q_o^T \, (\Delta \, \underline{e}_{oi} + E_{oi} \, \underline{\varepsilon}_{e_o}) \tag{72}$$

elde edilir.

Böylece $\underline{dU}_i$ için (68) ve (72) de gösterilen ve parametreleri farklı olan iki ayrı eşitlik elde edildi. $\underline{de}_{ij}$ nin elde edilmesinde seçilen parametrelere bağlı olarak bu iki eşitlikten biri kullanılır.

KOORDİNAT VEKTÖRÜ ($\underline{\delta\lambda}_i$) NİN DATUM VE ELİPSOİD PARAMETRELERİNE GÖRE DEĞİŞİMİ

$\underline{dU}_i$ ve $\underline{\delta\lambda}_i$ arasındaki bağıntı ele alındığında

$$\underline{dU}_i = Q_i^T \, S_i \, \underline{\delta\lambda}_i \tag{73}$$

ve elipsoid parametreleri ile birlikte :

$$\underline{dU}_i = Q_i^T \, S_i \, \underline{\delta\lambda}_i + Q_i^T \, F_i \, \underline{\delta f} \tag{74}$$

burada

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{M}{1-f} \operatorname{Sin}2\phi & 0 \\ 0 & \dfrac{N}{a} \end{bmatrix}$$

ve ;

$\underline{\delta f} = (\delta f \; , \; \delta a)^T$ dur.

(68) ve (74) birbirine eşitlenirse :

$$Q_i^T S_i \underline{\delta\lambda}_i + Q_i^T F_i \underline{\delta f} = U^{orj} + \underline{\Delta U}_i + U_i \underline{\omega}_u \tag{75}$$

Buradan :

$$\underline{\delta\lambda}_i = R_i^T Q_i \left[\underline{U}^{orj} + \underline{\Delta U}_i + U_i \underline{\omega}_u \right] - R_i^T Q_i Q_i^T F_i \underline{\delta f}$$

$$\underline{\delta\lambda}_i = R_i^T Q_i \left[\underline{U}^{orj} + \underline{\Delta U}_i + U_i \underline{\omega}_u \right] - R_i^T F_i \underline{\delta f} \tag{76}$$

elde edilir. Katsayılar bir matriste toplanırsa ;

$$\underline{\delta\lambda}_i = J\underline{x} \tag{77}$$

Burada :

$$\underline{x} = (\mu^{orj},\ v^{orj},\ w^{orj},\ \omega_u, \omega_v, \omega_w, \Delta,\ \frac{\delta f}{1-f}\ ,\ \frac{\delta a}{a}\ )^T$$

Aynı şey (72) ve (74) eşitlenerek ve $\underline{dU}_Q$ için (50) alınarak da yapılabilir.

$$Q_i^T S_i \underline{\delta\lambda}_i + Q_i^T F_i \underline{\delta f} = Q_o^T S_o \underline{\delta\lambda}_o + Q_o^T S_o \underline{\delta f} + \delta Q_o^T \underline{e}_{oi} + Q_o^T (\Delta \underline{e}_{oi} + E_{oi} \underline{\varepsilon}_{eo}) \tag{78}$$

yeniden yazılırsa :

$$\delta\lambda_i = R_i^T Q_i Q_o^T \left[S_o \underline{\delta\lambda}_o + Q_o \delta Q_o^T \underline{e}_{oi} + \Delta \underline{e}_{oi} + E_{oi} \underline{\varepsilon}_{eo} \right] + (R_i^T Q_i Q_o^T F_o - R_i^T F_i) \underline{\delta f} \tag{79}$$

Buradaki $Q_o \delta Q_o^T \underline{e}_{oi} + E_{oi} \underline{\varepsilon}_{eo}$ terimi incelenirse :

$$Q_o \delta Q_o^T \underline{e}_{oi} + E_{oi} \underline{\varepsilon}_{eo} = \begin{bmatrix} -\mathrm{Sin}\phi_o m_{oi} \delta\lambda_o + \mathrm{Cos}\phi_o n_{oi} \delta\lambda_o \\ \mathrm{Sin}\phi_o e_{oi} \delta\lambda_o + n_{oi} \delta\phi_o \\ -\mathrm{Cos}\phi_o e_{oi} \delta\lambda_o + m_{oi} \delta\phi_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -n_{oi} \varepsilon_{mo} + m_{oi} \varepsilon_{no} \\ n_{oi} \varepsilon_{eo} - e_{oi} \varepsilon_{no} \\ -m_{oi} \varepsilon_{eo} + e_{oi} \varepsilon_{mo} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\varepsilon_{no} - \mathrm{Sin}\phi_o \; \delta\lambda_o) \; m_{oi} - (\varepsilon_{mo} - \mathrm{Cos}\phi_o \; \delta\lambda_o) \; n_{oi} \\ (\varepsilon_{eo} + \delta\phi_o) \; n_{oi} - (\varepsilon_{no} - \mathrm{Sin}\phi_o \; \delta\lambda_o) \; e_{oi} \\ -(\varepsilon_{eo} + \delta\phi_o) \; m_{oi} + (\varepsilon_{mo} - \mathrm{Cos}\phi_o \; \delta\lambda_o) \; e_{oi} \end{bmatrix} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} p_o &= \varepsilon_{eo} + \delta\phi_o \\ q_o &= \varepsilon_{mo} - \mathrm{Cos}\phi_o \; \delta\lambda_o \\ r_o &= \varepsilon_{no} - \mathrm{Sin}\phi_o \; \delta\lambda_o \end{aligned} \tag{81}$$

ve

$\underline{P}_o = (p_o, q_o, r_o)^T$ vektörü ile

$$Q_o \; \delta Q_o^T \; \underline{e}_{oi} + E_{oi} \; \underline{\varepsilon}_{eo} = E_{oi} \; \underline{P}_o \tag{82}$$

olduğu görülür. Yerine konursa

$$\underline{\delta\lambda}_i = R_i^T \; Q_i \; Q_o^T \left[S_o \; \underline{\delta\lambda}_o + E_{oi} \; \underline{P}_o + \Delta \; \underline{e}_{oi} \right] + (R_i^T \; Q_i \; Q_o^T \; F_o - R_i^T \; F_i) \underline{\delta f} \tag{83}$$

elde edilir.

Katsayılar bir matriste toplanırsa :

$$\underline{\delta\lambda}_i = \Theta \; \underline{y} \tag{84}$$

burada ;

$$\underline{y} = \left(\delta\lambda_o, \delta\phi_o, \delta h_o, p_o, q_o, r_o, \frac{\delta f}{1-f}, \frac{\delta a}{a}\right)^T$$

Artık $\underline{de}_{ij}^{②}$ terimi elde edilebilir :

$$\underline{de}_{ij}^{②} = A_{ij}^T \; L_{ij} \; \underline{d\alpha}_{ij}^{②} = dQ_i^{②} \; \underline{\Delta U}_{ij} + Q_i \; (\underline{dU}_j^{②} - \underline{dU}_i^{②}) \tag{85}$$

DIŞ PARAMETRE VEKTÖRÜ OLARAK x ALINDIĞINDA $\underline{de}_{ij}^{(2)}$

$\underline{dU}_j$ ve $\underline{dU}_i$ için (68) eşitliği kullanıldığında ve elipsoid parametreleri de ele alındığında :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = dQ_i^{(2)}\, \underline{\Delta U}_{ij} + Q_i \left[\underline{U}^{orj} + \Delta \underline{U}_j + U_j\, \underline{\omega}_u - \underline{U}^{orj} - \Delta \underline{U}_i - U_i\, \underline{\omega}_u \right] + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\underline{\delta f} \tag{86}$$

$dQ_i^{(2)}$ için ise (62) eşitliği kullanılabilir :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -Q_i^T\, K^{(2)}\, \underline{\Delta U}_{ij} + Q_i\, \underline{\Delta U}_{ij}\, \Delta + Q_i (U_j - U_i)\underline{\omega}_u + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\underline{\delta f} \tag{87}$$

Burada $K^{(2)}$ $(\delta\lambda, \delta\phi, \delta h)^{(2)}$ ye dayalıdır. (40) eşitliği yerine konduğunda :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -Q_i^T\, G_{ij}\, \underline{\delta\lambda}_i^{(2)} + Q_i\, \underline{\Delta U}_{ij}\, \Delta + Q_i\, (U_j - U_i)\underline{\omega}_u + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\, \underline{\delta f}$$

$\underline{\delta\lambda}_i^{(2)}$ koordinat vektörünü datum ve elipsoid parametrelerine göre değişimidir. (77) den eşiti yerine konursa ;

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -Q_i^T\, G_{ij}\, J\underline{x} + \underbrace{Q_i\, \underline{\Delta U}_{ij}\, \Delta + Q_i\, (U_j - U_i)\underline{\omega}_u + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\underline{\delta f}}_{\text{Bir T matrisinde toplanırsa}} \tag{88}$$

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -\, Q_i^T\, G_{ij}\, J\chi + T_{ij}\, \chi$$

$$\underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = M_{ij}^T\, A_{ij}\, (-\, Q_i^T\, G_{ij}\, J + T_{ij})\, \chi \tag{89}$$

elde edilir.

DIŞ PARAMETRE VEKTÖRÜ OLARAK y ALINDIĞINDA $\underline{de}_{ij}^{(2)}$.

Bu kez $\underline{dU}_j$ ve $\underline{dU}_i$ için (72) eşitliği kullanıldığında ve yine elipsoid parametreleri de ele alındığında :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = dQ_i^{(2)}\, \underline{\Delta U}_{ij} + Q_i \Big[\underline{dU}_o + dQ_o^T\, \underline{e}_{oj} + Q_o^T\, (\Delta\, \underline{e}_{oj} + E_{oj}\, \underline{\varepsilon}_{eo})$$
$$- \underline{dU}_o - dQ_o^T\, \underline{e}_{oi} - Q_o^T\, (\Delta\, \underline{e}_{oi} + E_{oi}\, \underline{\varepsilon}_{eo}) \Big] + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\, \underline{\delta f} \qquad (90)$$

$dQ_i^{(2)}\, \underline{\Delta U}_{ij}$ için aynı işlemler (62) ve (64) eşitlikleri ile uygulanırsa :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = - Q_i^T\, G_{ij}\, \underline{\delta\lambda}_i^{(2)} + Q_i\, Q_o^T\, \Big[Q_o\, dQ_o^T\, \underline{e}_{oj} + E_{oj}\, \underline{\varepsilon}_{eo} + \Delta\, \underline{e}_{oj}$$
$$- Q_o\, dQ_o^T\, \underline{e}_{oi} - E_{oi}\, \underline{\varepsilon}_{eo} - \Delta\, \underline{e}_{oi} \Big] + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\, \underline{\delta f} \qquad (91)$$

(84) kullanılarak :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = - Q_i^T\, G_{ij}\, \Theta\, \underline{y} + Q_i\, Q_o^T\, \Big[Q_o\, dQ_o^T\, \underline{e}_{oj} + E_{oj}\, \underline{\varepsilon}_{eo} + \Delta\, \underline{e}_{oj}$$
$$- Q_o\, dQ_o^T\, \underline{e}_{oi} - E_{oi}\, \underline{\varepsilon}_{eo} - \Delta\, \underline{e}_{oi} \Big] + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i)\, \underline{\delta f} \qquad (92)$$

(82) kullanılarak :

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -Q_i^T\, G_{ij}\, \Theta\underline{y} + Q_i\, Q_o^T \Big[(E_{oj} - E_{oi}) p_o + (\underline{e}_{oj} - \underline{e}_{oi}) \Delta \Big] + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i) \underline{\delta f} \qquad (93)$$

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -Q_i^T\, G_{ij}\, \Theta\underline{y} + Q_i \Big[Q_o^T\, (E_{oj} - E_{oi}) \underline{p}_o + \underline{\Delta U}_{ij}\, \Delta \Big] + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i) \underline{\delta f} \qquad (94)$$

$$A_{ij}^T\, L_{ij}\, \underline{d\alpha}_{ij}^{(2)} = -Q_i^T\, G_{ij}\, \Theta\underline{y} + Q_i\, Q_o^T\, (E_{oj} - E_{oi}) \underline{p}_o + Q_i\, \underline{\Delta U}_{ij}\, \Delta + (Q_i\, Q_j^T\, F_j - F_i) \underline{\delta f} \qquad (95)$$

Katsayılar bir D_{ij} matrisinde toplanırsa

$$\underline{d\alpha}_{ij}^{②} = M_{ij}^T A_{ij} \left[-Q_i^T G_{ij} \Theta + D_{ij} \right] \underline{y} \tag{96}$$

elde edilir.

KONUM DATUM VE ELİPSOİD PARAMETRELERİNİN BİRLEŞTİRİLMESİ

(57) den ;

$$\underline{de}_{ij} = \underline{de}_{ij}^{①} + \underline{de}_{ij}^{②}$$

$$A_{ij}^T L_{ij} \underline{d\alpha}_{ij} = A_{ij}^T L_{ij} \underline{d\alpha}_{ij}^{①} + A_{ij}^T L_{ij} \underline{d\alpha}_{ij}^{②}$$

$$\underline{d\alpha}_{ij} = \underline{d\alpha}_{ij}^{①} + \underline{d\alpha}_{ij}^{②} \tag{97}$$

(65) ve (96) yerine konursa, gözlem denklemi olarak :

$$\boxed{\underline{d\alpha}_{ij} = M_{ij}^T A_{ij} \left[Q_i Q_j^T S_j \underline{\delta\lambda}_j - (S_i + Q_i^T G_{ij})\delta\lambda_i + (D_{ij} - Q_i^T G_{ij}\Theta) \right] \underline{y}} \tag{98}$$

elde edilir. Bir C' katsayılar matrisinde toplanırsa :

$$\underline{d\alpha}_{ij} = C'_{ij} \underline{\delta\lambda}_{ij}$$

burada :

$$C'_{ij} = M_{ij}^T A_{ij} \left[Q_i Q_j^T S_j \;,\; -(S_i + Q_i^T G_{ij}) \;,\; (D_{ij} - Q_i^T G_{ij} \Theta) \right] \quad \text{dır.}$$

SONUÇ

Yeryuvarının büyüklüğü, biçimi ve çekim alanı ile ilgili bilgi taşıyan, stokostik anlamda da bağımsız oldukları ileri sürülemeyen her türden büyüklüğün (ölçme ve gözlemelerin) tek bir potada işlenmesi zorunlu olduğu kadar anlamlı da görülmektedir. Böylesi bir bütünleşik sistemin çekirdeği üç boyutta astrojeodezik ağ olacaktır. Bu çalışmada klasik yersel ölçüler olan yatay doğrultuları, başucu açıları ve eğik uzaklıklar için herbiri 17 parametre içeren düzeltme denklemleri katsayılar matrisi elde edilmiştir. (Katsayıların açık eşitlikleri/Sarbanoğlu 1984/. de yer almaktadır.). Yakın bir gelecekten itibaren ağ dengelemeleri uygulamalarında üç (hatta dört) boyutlu fonksiyonel modellerin ve kolokasyon yaklaşımı ile stokastik modellerin kullanılacağını ileri sürmek, pek de yanlış bir tahmin sayılmaz.

Başucu açıları şimdiye kadar duyarlı biçimde birikimi yapılmış bir ölçü türü değildir. Ancak üç boyutlu fonksiyonel modellerde yapılan sayısal uygulamalar ; başucu açıları olmadığında (ilk iki denklem kullanıldığında) veya duyarlıklarının iyi olmadığı durumda bile ilk iki konum parametresinin (enlem ve boylamın)bundan olumsuz etkilenmediğini, duyarlı biçimde ve iki boyutlu dengelemelere göre daha anlamlı elde edilebildiğini göstermektedir. (yükseklik kontrollu üç boyutta dengeleme). Bu da üç boyutta dengelemenin, büyük astrojeodezik ağ dengelemelerinde halihazırda bile uygun bir model olduğunu göstermektedir. Üçüncü boyut daha duyarlı elde edilmek istendiğinde, bütünleşik sisteme, nivelman ve gravite büyüklüklerinin de dahil edilmesi gerekmektedir. Ayrıca, ağın uzaydaki mutlak konumu daha serbest ve anlamlı saptanmak istendiğinde, bütünleşik sisteme bu kez de göksel verilerin (doppler point positioning, laser ranging, vb.) dahil edilmesi gerekecektir. Ancak sistemin bu şekilde genişletilmesi, gelişmiş bir stokastik modeli (kolokasyon) zorunlu kılacaktır.

KAYNAKÇA

/1/ AKSOY A. : Dengeleme Ders Notları. Hrt.Yük.Tek.Ok. ANKARA 1980

/2/ BOMFORD G. : Geodesy. 3 rd. edition. Oxford 1971

/3/ GÜRKAN O. : Üç Boyutta Benzeşim Dönüşümü ve Değişik Jeodezik (elipsoid) Sistemler Arasındaki Bağıntılar. KTÜ TRABZON 1977

/4/ GÜRKAN O. : Astrojeodezik Ağların Deformasyonu ve Türkiye Birinci Derece Triangülasyon Ağı.

/5/ HEISKANEN W.A. MORITZ H. : Physical Geodesy. San Francisco and London. 1967

/6/ HOTINE M. : Mathematical Geodesy, Washington D.C. Essa Monograph 2. 1969

/7/ MIKHAIL E.M. : Observations and Least Squares. 1976

/8/ SARBANOĞLU H. : Üç Boyutta Astrojeodezik Ağ Dengelemesi. KTÜ TRABZON 1982

/9/ VINCENTY T. BOWRING B.R. : Applications of Three Dimensional Geodesy to Adjustments of Horizontal Networks. Virginia 1978