Jeodezi:

Arzın şeklini tayin için kullanılan muhtelif metodlar

Y. Mühendis
Macid Erbudak

Jordan, Prey, Helmert den

Arzın şeklini tayin ederken bidayette arzın fiziki sathı nazarı itibara alınmaz. Zira arzın sathını teşkil eden arızalar riyazi olarak ifade edilemediği gibi bunlar arzın büyüklüğüne nisbetle çok küçük miktarlar olduklarından ihmal edilebilirler. Binaenaleyh bu fiziki satıh yerine hendesi bir satıh ikame olunurki bu evvelâ hesaplarda küre sonrada devrani bir ellipsoid olarak nazarı itibara alınır. Arzın sathı üzerinde ölçtüğümüz halde hesaplarımızı bu ellipsoid üzerinde yaparız. Bu hendesi sathın bütün rakımları aynıdır ve bu satıh her noktasından geçen tacil istikametine o noktada amuttur. Tacil istikameti ise arzın cazibe kuvveti ile arzın dönmesinden tevellüd eden kuvvei anilmerkeziyenin muhassalası istikametidir.

Bu nazari satha tesviye sathı diyeceğiz. Böyle iki kuvvet tesiri altında olarak devran eden bir mayi kitlesinin sathı ayni vasfı haizdir. Yani böyle bir satıh her noktasına tesir eden kuvvetlerin muhassalasına o noktalarda amuttur.

Mayi sathı kuvvetler muhassalasına amut olmayup bu muhassalaya mail vaziyette olsaydi bu muhassalanın bir mürekkibi bu satıh üzerinde bulunacaktı ve tevazün husul buluncaya kadar mayiin bu mürekkip kuvvet istikametinde hareket etmesi lâzım gelecekti. Halbuki deniz sathı hali sükûnettedir. Bu suretle arzın sathını hydrostatik kanunlara göre mütalea edebilmiş oluyoruz. Yalnız arzın dahili tazyikine maruz bulunmayan arzın fiziki sathı esas şeklini muhafaza etmekle tesviye sathı ile intibak etmemiş olur.

Eğer arzı, deveran etmeyen, mütecanis bir kitle olarak nazarı itibara alırsak, hydrostatik kanunlar vasıtasile tesviye sathının bir küre sathından ibaret olduğunu anlarız. Fakat arzın deveran etmekte olduğu şartını ilave edersek tesviye sathı olarak küre sathı yerine devrani bir ellipsoid elde ederiz.

Eğer arz kitlesinin mütecanis olmadığı şartıda ilâve edilecek olur ve bu kitlenin kesafeti arzın içine doğru arttığıda hesaba katılırsa, daha muğlak bir tesviye sathı elde ederizki buna deverani spheroid deriz.

Arzın sathındaki kitlelerin gayri muntazam olarak tavazzu etmiş olması tesviye sathına tesir edeceğinden, böyle bir sathı riyazi olarak ifade edemiyeceğiz. Buna geoid [*] ismini veriyoruz.

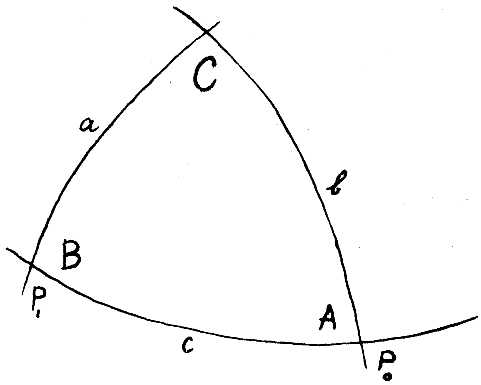
Deniz sathı geoid in bir parçasını teşkil eder. Arzın her noktasından aynı evsafı haiz olan bir tesviye sathı geçer. Tesviye satıhları kapalı satıhlardır ve yekdiğerlerini katetmezler. İşte bunlardan deniz sathına muntabık olanına geoid diyorduk. Geoid in tayininde deniz sathı büyük bir rol oynar. Zira evvelce söylediğimiz gibi deniz sathı geoidin bir parçasıdır.

Geoid şakul inhiraflarından tayin edildiği gibi (miktarı tacil ölçmek) usulilede tayin edilebilir. İleride (miktarı tacil ölçmek) usulünden bahsederken tesviye satıhlarının riyazi ifadesini ve bunların bir takım hassalarını mütalaa edeceğiz.

[*] Meslekdaşım Hüseyin Bozkırın 31 numarada çıkan yazısına müracaat.

1. Şakul inhiraflarından geoid in tayini.

Hesaplarımızı üzerinde yaptığımız ve arzın takribi sathı olarak kabul edilen E deveranı ellipsoidi G geoid ine p_0 noktasında mümas olsun. Bu takdirde p_0 noktasından her iki satha çizilen şakuller yekdiğerine intibak ederler. Ayrıcada bu iki sathın deveran mihverlerinin yekdiğerine muvazi olduklarını kabul edelim.



Şekil 1

Deniz sathı üzerinde bulunan p′ noktasından her iki satha çizilen L, L′ (şakulleri-nazımları) yekdiğerine intibak etmezler, aralarındaki zaviyeye şakul inhirafı denir.

Bu şakul inhirafı ise p noktasının (φ, λ) coğrafi arz ve tul kıymetlerini p′ noktasının (φ', λ') kıymetleri ile mukayese ederek anlaşılır.

Ellipsoid üzerinde p_0 noktasının coğrafi vaz'iyeleri, ve $p_0\,p$ geodezik hattın uzunluğu ile semti malûm olduğundan p noktasının (φ, λ) coğrafi vaz'iyeleri ellıpsoid üzerinde hesaplanır. φ', λ' ise doğrudan doğruya astronomik rasatlarla elde edilen coğrafi vaz'iyelerdir.

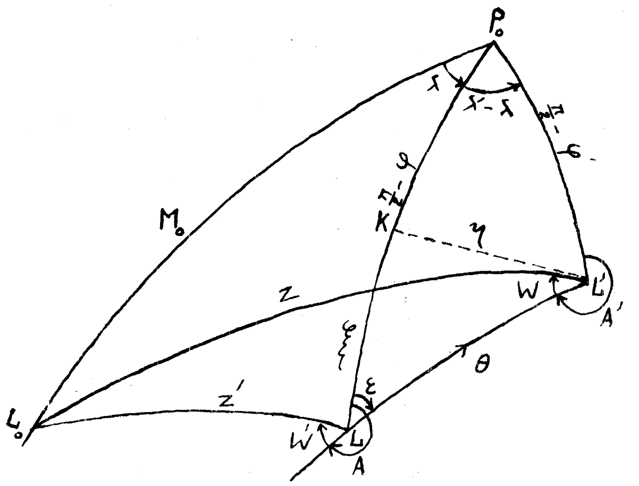
Bu kıymetlerin mukayesesi neticesinde elde edilen farklar iki türlü karakter gösterirler:

1 - Bu farklar p_0 mebde noktasından itibaren mütemadi şekilde tezayüt ederler.

2 - Bu tezayüt muntazam olmayarak hatta bazı noktalarda tenakus arzederler, Mütemadi tezayüde iz'afi tezayüt denir. Zira bu geoid ile deverani ellipsoid satıhlarının inhina farklarından ileri gelirler. Yani bu farklar hesap sathı olarak kabul edilen deverani ellipsoid in vaziyet ve şekline tabi olurlarki bu sebepten dolayı iz'afidirler.

Gayri muntazam tahavvüllere ise mutlak tahavvül deriz. Çünki bunlar arzın sathındaki kitlelerin gayri muntazam olarak tevezzuundan husule gelirler.

Şimdi p' noktası merkez olmak üzere vahid nısıf kutru ile bir küre çizelim. p' noktasından deveran mihverine resmedilen muvazi bu küreyi p_n şakuller ise L_0, L, L' noktalarında katederler.



Şekil 2

θ = L L Zenit inhirafıdır. ε ise bunun semtidir. İnhirafı şakul zaviyesi ise Zenit inhirafına kıymeti mutlakaca müsavi işaretce muhtelifdir. Binaenaleyh bunların semtleri arasıneaki fark 200 graddır.

L' noktasından, L noktasından geçen meridyana $(L'K)$ amut müstevisini geçirir isek Zenit inhirafının $L'K = \eta$ $LK =$ vaz'i-yelerini kolayca hesaplarız.

$$\xi = \theta \cos \varepsilon$$
$$\eta = \theta \sin \theta \qquad (1)$$

ve η, $(\lambda - \lambda')$ miktarları φ' ve φ ye nazaran namütenahi küçük olduklarından şekil 2 den:

$$\xi = \varphi' - \varphi$$
$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi \qquad (2)$$

(2) muadelelerini yazabiliriz.

Halbuki şekil 1 den, $\mu = \varphi - \varphi'$ olduğundan $\mu = -\xi$ olur.

Şimdi p_0 noktasından hareket ederek ellipsoid üzerinde yaptığımız geodezik hesaplarla p noktasına düşelim. p_0 noktasında $\theta = 0$ dır. p_0 den p ye astronomie yolile ölçülen Zenit mesafesi z ile geodesie yolile elde elilen Zenit mesafesi z' arasındaki fark çok küçüktür.

Şekilden $(A + W) = \alpha$ ile $(A' + W') = \alpha'$ zaviyeleri p_0 p uzunluğunun geodezik ve astrnomik semtleridir. Buna göre:

$$\alpha - \alpha' = d\alpha = (W - W'') + (A - A') \qquad (3) \qquad \text{olur.}$$

$P_0 L L'$ kürevi müsellesinden:

$$\operatorname{tg} \frac{z + z''}{2} = - \frac{\sin \frac{W + W'}{2}}{\sin \frac{W - W''}{2}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \qquad (4) \qquad \text{yazılır.}$$

$W \approx W'$, $z \approx z''$ ve θ da çok küçük olduğundan:

$W + W'' = 2W$ ve $z + z' = 2z$ olarak hesap edilebileceğinden (4) müsavatı şu şekli alır:

$$\operatorname{tg} z = - \frac{\sin W}{(W - W')} \theta$$

ve buradan (5) müsavatını elde ederiz:

$W - W' = - \theta \cot g\, z \sin W$ (5)

$P_n L L'$ kürevi müsellesinden ise aşağıdaki müsavatı yazarız:

$$\cot g \frac{\varphi + \varphi'}{2} = \frac{\sin \frac{A + A'}{2}}{\sin \frac{A - A'}{2}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{z} \qquad (6)$$

Bu da ilk müsavat gibi muamele görerek şu şekli alır:

$A - A' = \theta \operatorname{tg} \varphi \sin A$ (7)

$(A - A')$ ile $(W - W')$ nin müsavilerini (3) müsavatında yerlerine koyarsak:

$$d\,\alpha = - \theta \cot g\, z \sin (\alpha - A) + \theta \operatorname{tg} \varphi \sin A \qquad (8)$$

$z \approx 100$ olduğu için $\cot g\, z \approx 0$ olurki (8) müsavatında birinci had ihmal edilir ve:

$d\,\alpha = \theta \operatorname{tg} \varphi \sin A$ (9) olur.

$\theta \sin A = \eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi$ olduğundan (9) müsavatından (10) müsavatına ğeçeriz.

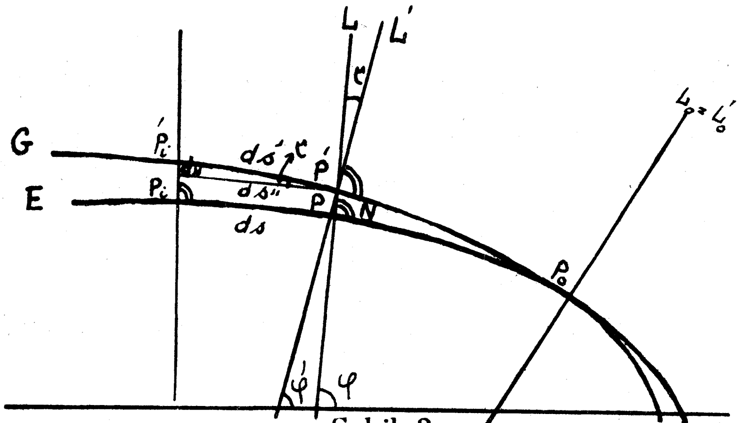
$d\,\alpha = (\lambda - \lambda') \sin \varphi$ (10)

İşte bu (10) muadelesine Laplas muadelesi, semt, tul ve arzı coğrafisi astronmie yolile ölçülen bir noktaya da laplas noktası denir. Hesaplanan ve ölçülen kıymetler ancak bu laplas muadelesini tahkik ettikleri takdirde bir inhiraf şakulden bahsolunabilir. Rasat hatalarından dolayi bu kıymetler laplas muadelesini tamamen tahkik edemezler. Bundan dolayi laplas noktalarının mıktarını mümkün mertebe arttırmak lâzımgelir.

Bu sefer ellipsoid geoid e p_0 noktasında mümas olmasın. Bu takdirde p_0 noktasının inhiraf şakul vaz'iyeleri ξ_0, η_0 olur. Bu suretle ellipsoid ile geoid in yekdiğerine olan vaziyetleri gayri muayyen demektir. Şimdi ξ_0, η_0 vaz'iyelerini o suretle tayin edeceğizki arzın sathına en yakın olan ellipsoid sathını elde etmiş olacağız.

Şekil 3 kürevi müsellesi için şu tefazuli muadeleleri yazabiliriz.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & da = \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin C \sin b\, dA \\ \text{II.} & \sin a\, dB = \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \cos C \sin b\, dA \\ \text{III.} & \sin a\, dC = \sin B\, dc - \cos a \sin C\, db - \cos B \sin c\, dA \end{array}\right\} (11)$$



Şekil 3

Burada $a = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $b = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ ‘ $C = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_{01}$

$A = 400 - \alpha_{01}$ $B = \alpha_{10}$ ye tekabül ederler ve bunlar ğeodesie yolile bulunan kıymetlerdir.

p_0 noktasında yapılan astronomie rasadlarla elde edilen φ'_0, λ'_0, α'_{12} kıymetlerini şimdi yukarıda yazmış olduğumuz (11) tefazulu muadelelerinde yerlerine koyarsak p_1 noktası için φ''_1, λ''_1, α''_{10} kıymetlerini buluruz. Bu kıymetler geodezik hesaplarla bulunan φ_1, λ_1, α_{10} kıymetlerinden farklıdırlar:

$$\varphi'_0 - \varphi_0 = d\varphi_0, \qquad \lambda'_0 - \lambda_0 = d\lambda_0, \qquad \alpha'_{91} - \alpha_{01} = d\alpha_{01}$$
$$\varphi''_1 - \varphi_1 = d\varphi_1, \qquad \lambda''_1 - \lambda_1 = d\lambda_1, \qquad \alpha''_{10} - \alpha_{10} = d\alpha_{10}$$

Bu farkları yazar $p_0 p_1 = s$ uzunluğunun da şimdilik değişmediğini kabul edersek $dc = 0$ olacağından aşağıdaki kıymetleri buluruz.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I den } d\varphi_1 = \sin\lambda_{01}\sin\varphi_0\, d\alpha_{01} + \cos\lambda_{01}\, d\varphi_0 \\ \text{II den } d\lambda_1 = d\lambda_0 - \sin\lambda_{01}\,\text{cosec}\,\alpha_{01}\cos\alpha_{01}\, d\alpha_{01} + \text{tg}\,\varphi_1 \sin\lambda_{01}\, d\varphi_0 \\ \text{III den } d\alpha_{10} = \cos\lambda_{01}\,\text{co}\,\varphi_0 \sec\varphi_1\, d\alpha_{01} - \sec\varphi_1\sin\lambda_{01}\, d\varphi_0 \end{array}\right\} (12)$$

yazılır.

Halbuki p_1 noktasında yapılan astronomik rasatlarla elde edilen kıymetler ise φ_1', λ_1', α_{10}' olsun. Bu takdirde inhiraf şakul vaz'iyelerini yazabiliriz:

$$\begin{array}{ll} -d\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_0' = \xi_0 & \varphi_1 - \varphi_1' = \xi_1 \\ -d\lambda_0 = \lambda_0' - \lambda_0 = -\eta \sec\varphi_0 & \lambda_1 - \lambda_1' = -\eta_1 \sec\varphi_1 \\ -d\alpha_{01} = \alpha_{01} - \alpha_{01}' = \eta_0\, \text{tg}\,\varphi_0 & \alpha_{10} - \alpha_{10}' = \eta_1\, \text{tg}\,\varphi_1 \end{array}$$

Buradan:

$$\begin{array}{l} d\varphi_1 = \varphi_1'' - \varphi_1 = \varphi_1'' - \varphi_1' - \xi_1 \\ d\lambda_1 = \lambda_1'' - \lambda_1 = \lambda_1'' - \lambda_1' + \eta_1 \sec\varphi_1 \\ d\alpha_{10} = \alpha_{10}'' - \alpha_{10} = \alpha_{10}'' - \alpha_{10}' - \eta_1\, \text{tg}\,\varphi_1 \end{array}$$

olur. Bu kıymetleri (12) muadelelerinde yerlerine koyarsak:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_1'' - \varphi_1' - \xi_1 + \sin\lambda_{01}\sin\varphi_0\,\eta_0 + \cos\lambda_{01}\xi_0 = 0 \\ -(\sec\varphi_0 + \sin\lambda_{01}\,\text{cosec}\,\alpha_{01}\cos\alpha_{10}\,\text{tg}\,\varphi_0)\,\eta_0 + \\ \lambda_1'' - \lambda_1' + \eta_1\sec\varphi_1 + \text{tg}\,\varphi_1\sin\lambda_{01}\xi_0 = 0 \\ \alpha_{10}'' - \alpha_{10}' - \eta_1\,\text{tg}\,\varphi_1 + \cos\lambda_{01}\sec\varphi_1\sin\varphi_0 - \sec\varphi_1\sin\lambda_{01}\xi_0 = 0 \end{array}\right\} (13)$$

muadelelerini elde ederiz. Bunları kısaca şu şekilde irae edelim:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = -l_1 + a_1\xi_0 + b_1\eta_0 \\ \eta_1 = -l_1' + a_1'\ {}_0 + b_1'\eta_0 = -l_1'' + a_1''\ {}_0 + b_1''\eta_0 \end{array}\right\} (14)$$

p_0 mebde noktası civarında müteaddit laplas noktaları aldığımız takdirde (14) muadelelerini bu müteaddit laplas noktaları için yazar ve $\Sigma(\xi_1^2 + \eta_1^2)$ mecmuunun asgari olması şartını koşarak mebde noktasının η_0, ξ_0 inhiraf şakul vaz'iyelerini muvazene yolile tayin edebiliriz.

Ayrıca (14) muadelelerile birlikte bir de:

$$- l_1' + l'' + (a_1' - a_1'')\xi_0 + (b_1' - b_1'')\eta_0 = 0$$

şart muadelesi mevcuttur.

Geoid sathı üzerindeki astronomie istasyonları yekdiğerine çok yakın olarak tesis edilmiş oldukları takdirde geoid in ellipsoid de olan N mesafelerini kolayca hesaplayabiliriz.

Şekil 1 den $ds \approx ds''$ olarak kabul edebileceğimizden:

$$\left.\begin{aligned} dN &= -\xi\, ds'' \\ N &= -\int \xi\, ds \end{aligned}\right\} (15)$$

yazılabilir.

Bu (15) itmamını grafik usul ile hesap etmek mümkündür.

Zaviye tashihleri: Geoidin ufuk müstevisi ellipsoid in ufuk müstevisine muntabık olmadığıddan geoid sathı üzerinde ölçmüş olduğumuz ufki zaviyeleri ellipsoid in ufkuna irca etmemiz icap edecektir. Bu zaviye tashihleri sehpanın tamamen şakul vaziyette durmamasından ileri gelen zaviye tashihlerinin aynidir.

Yalnız h mıktarı geoid ufuk müstevisinin ellipsoid ufuk müstevisinden olan irtifaıdır. Geoid üzerinde ölçülen ufki zaviye U' ellipsoid ufkuna irca edilmiş ufki zaviyede U ise:

$$U - U' = (\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha)\, \mathrm{tg}\, h \qquad (16)$$ olur.

Bu tashih miktarı çok küçük olduğundan ekseriya ihmal edilir. Mamafih Semplon tüneli açılırken müselleslerin re'slerinin inhiraf şakulleri civar dağların cazibe kuvvetinden hesap edilerek bu re'slerde ölçülen zaviyeleri ellipsoid ufkuna irca ederken müselleslerin kapanma hatası 3",1 den 1,7" ye düşmüştür. Dağ kitlelerininin cazibe kuvvetinden, inhiraf şakullerin ne şekilde hesap edildiğini başka bir yazıde göstermek isterdim.

Simdi şakuli zaviyelerin de miktarı tashihlerini veren formülü yazalım:

$$z' - z = -\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \qquad (17)$$

Geoid üzerinde ölçülen α' semti ellipeoid üzerindeki α semtine daha evvel istihrac etmiş olduğumuz aşağıdaki laplas muadelesile irca olunur:

$$\alpha = \alpha' - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi$$

Bununla, rasatların maruz bulunduğu sistematik hatalardan mütevellit şebeke bükülmesinin önüne geçilmiş olur.

Astronomik rasatların laplas muadelesi yardımile hesaplara sokulması için muhtelif metodlar bulunmuştur. Gelecek yazılarda bu metodlardan kısaca bahsetmek isterdim.