

APRİORİ VE APOSTERİORİ DEYİMLERİ ÜZERİNE

Seyfullah DEMİRKAYA

ÖZET

Ölçme verilerinin analizini içeren çalışmalarda latince kökenli apriori ve aposteriori* deyimleriyle sık sık karşılaşılır.

Apriori, nedenlerden sonuçlara tümdengelim, aposteriori ise sonuçlardan nedenlere tümevarımı tanımlar.

Bu deyimler, ölçüm, parametre kestirimi (dengeleme) ve varyans analizinde amacın ne olduğunun daha iyi anlaşılması için jeodezik ölçme etkinliği içinde açıklanmaya çalışılmıştır.

ABSTRACT

The latin phrases a posteriori appear frequently in the studies which include the analysis of survey data.

A priori means that proceeds from causes to effects. It is deductive. On the other hand, a posteriori proceeds from effects to causes. It is empirical.

It has been tried to explain these phrases, to understand better what is aimed at survey measurement, parameter estimation (adjustment) and variance analysis in surveying activity.

1. GİRİŞ

Latince kökenli apriori ve aposteriori deyimleriyle jeodezi ve fotogrametri yayınlarında sık sık karşılaşılır. Bunlar, jeodezik, fotogrametrik ve mühendislik kontrol ağları ile bağlantılı olarak, temelde farklı iki bilgi türünü yansıtır.

Apriori ve aposteriori deyimlerinin dilimizdeki karşılıkları, birer sözcük ile, önsel ve sonsaldır (Ancak, öncül ve soncul olarak kullanma yeğlenmektedir; örneğin, Öztürk; 1987). Tümce içinde kullanıldıkları yere göre bazen bir sıfat olarak başlarına geldikleri adları nitelerler ya da be-

* Apriori ve aposteriori deyimlerinin türkçe söyleyişe göre yazılışları kullanılmıştır (Özleştirme Kılavuzu T.D.K. 1978).

lirtirler: apriori bilgi, apriori analiz, apriori usavurma gibi. Bir belirteç (zarf) olarak da bir eylemin, bir sıfatın ya da başka bir belirtecin anlamını tamamlarlar. Tümce içindeki bu işlevleriyle önsel; Deney öncesi verilere dayanan ya da hiç bir deneye dayanmadan ve salt us yardımıyla varılan bir yargı biçimidir. Sonsal ise, deneme ile edinilen olaylardan çıkarılan yargı biçimidir (Püsküllüoğlu, 1975; Saraç, 1976).

Apriori usavurma (akıl yürütme) kanıtlanmamış aksiyomlara ve tanımlanmamış ögelere dayalı biçimsel bir yapı içinde doğru önermeleri elde etmek için yapılan karşılaştırma ve birtakım belleksel işlemler yoluyla varılan yargıdır. Kısaca, nedenlerden sonuçlara tümdengelimlidir, yani deterministik (gerekirci) bir yaklaşımdır (Cooper, 1982).

Matematik bir apriori usavurma örneğidir. Önermeler ya da aksiyomların kurulmasıyla başlar ve kabul edilmiş kurallara göre sonuçlara adım adımler. Öklit geometrisi de bir apriori usavurma örneğidir. "İki nokta arasında yalnız bir düz doğru çizilebilir" gibi bir aksiyomlar kümesinden yola çıkılarak noktaların, doğruların ve düzlemlerin özelliklerini anlamak olanaklıdır. Apriori usavurma sonuçlarının geçerliliği fiziksel gerçekten tamamen bağımsızdır. Bir dörtgenin iç açılarının toplamının dört dik açı olduğu apriori gerçeğini kanıtlamak için bu açıları ölçmek gereksizdir.

Apriori usavurmaya karşıt olarak aposteriori usavurma sonuçlardan nedenlere doğru bir yol izler, ampiriktir, yani deneylere ya da ölçülere dayanır. Gözlenmiş bir olayın yeniden oluşturulmasıyla başlar ve içinde sık sık matematiğin kullanıldığı mantıksal tartışmayla olayı açıklamaya girişir (Cooper, 1982).

Bilim, bir aposteriori usavurma örneğidir (Armay, 1981). Ölçmeciler çekülün aşağı doğru sallanması olayını gözlemlerler ve bunun nedeninin yerçekim kuvveti olduğunu bilirler. Yerçekim kuvveti kavramıyla pek çok olay açıklanabilir. Bu yüzden yerçekimi kuvveti bir aposteriori gerçek olarak alınır. Matematik, yerçekimi kuvvetinin bir sarkaç ya da bir uydu üzerindeki etkilerini önceden kestirmek için kullanılabilir ve bu ön-kestirim gözlemlerle doğrulanırsa yerçekimi alanının matematiksel tanımı bir aposteriori gerçek olarak kabul edilir. Bununla beraber, zaman zaman, bir olayın gözlenen ve ön-kestirimle oluşturulmuş modelleri uyumlayabilir. Böyle bir durum ortaya çıktığında şimdiye kadar aposteriori gerçek olarak kabul edilen yargı, uzun süreli gözlemlerle oluşturulan stokastik model yardımıyla değiştirilebilir, örneğin yeryuvarının yerçekimi alanının matematiksel gösterimi yeniden tanımlanır.

Yukarıdaki açıklamalardan şu sonuç çıkarılabilir; aposteriori bilgi apriori bilginin aksine sürekli bir değişime konu olur. Apriori bilgide, aksiyomlar oluşturulmuş ve tümdengelim kuralları tanımlanmıştır. Bu bilgi ile kurulan apriori akıl yürütme ile her zaman doğru olan sonuçlara ulaşılır. Örneğin, cebirsel sayılar kuramında, genel olarak, $ab = ba$ 'dır. Fakat eğer a ve b matris iseler $ab \neq ba$ 'dır. Bu, $ab = ba$ 'nın yanlış olduğunu göstermez, yalnız burada dikkate alınan kurallar farklıdır.

Buradaki anlamıyla apriori usavurma satranç oyununa benzetilebilir. Tabla ve kareler aksiyomları gösterir ve oyun, kabul edilmiş kurallara göre oynanır. Kurallar yanlış uygulanmadıkça ya da oyunculardan biri hile yapmadıkça sonuç her zaman geçerlidir. Bu geçerlilik, tümdengelimli bilgilerin doğasında vardır. Ancak, apriori bilginin gözlenebilen olayların yapısına ve fiziksel gerçeğe ilişkin bir şey anlatamaması onu kısıtlayıcı en önemli etkenidir. Öklit geometrisinin aksiyomları ya da trigonometrik bağıntılarının sayısı iki nokta arasındaki uzunluğa ilişkin bir bilgi vermez. Düzlem trigonometri kurallarına göre $a = b \cdot \sin A / \sin B$ bir apriori gerçektir, ancak, eğer a, b, A ve B bir ağdaki bir üçgenin kenarları ve açıları ise, tek başına bir apriori usavurma ile onların değerleri elde edilemez.

Eğer tek başına apriori usavurma ile fiziksel gerçeğin özelliklerini anlamak olanaklı olsaydı ölçüler yardımıyla veri elde etme işlemi şimdikinden çok daha ucuz olacaktı (Cooper, 1982).

Böylesi bir durum sözkonusu olamayacağı için bu aşamada ölçmecinin kalemini bırakması ve bazı ölçmeler yapması gerekir. Eger üçgenin b kenarı ve A ve B açıları ölçülürse a kenarının uzunluğu b, A ve B ölçülerinden ve apriori $a = b \cdot \sin A / \sin B$ bağıntısından aposteriori hesaplanabilir. Ayrıca a kenarı da ölçülürse kuşkusuz farklı bir değer elde edilecektir. Ancak farklı bir değer elde edileceği, yukarıda değinildiği gibi, aposteriori bilginin değişime konu olması özelliği ile beklenmektedir. a 'nın bu iki değeri aletlerin presizyonu ya da ölçmecinin becerisi ya da özel bir üçgen için $a = b \cdot \sin A / \sin B$ bağıntısının kullanılmasının uygunluğu gibi, fiziksel gerçeğin geçerliliğine ilişkin bir kanıtlama yoluna gidilmez, çünkü apriori bir bilgidir ve bu yüzden her zaman kendi kuralları içinde tutarlıdır. b, B ve A 'dan yararlanarak a 'yı bulmak için küresel trigonometrik bir bağıntı da kullanılabilir. Aposteriori olayı açıklamak için yanlış bir apriori bağıntının kullanılması aposteriori sonuçlarda sistematik hataların ortaya çıkmasına neden olur.

2. APRIORİ VE APOSTERİORİ VARYANS ANALİZİ

Apriori ve aposteriori ya da tündengelimli ve tümevarımlı bilgiye ilişkin yukarıdaki açıklamalar apriori ve aposteriori varyans analizine bir dayanak oluşturur.

İşe, belli apriori aksiyomlar ile başlanır. Doğrusallaştırılmış Gauss-Markov modeli (Aytaç, 1984),

$$Ax = \ell + v$$

bir apriori usavurmadır.

Burada:

- n : Gözlemlerin sayısı
- u : Kestirilecek parametrelerin sayısı, olmak üzere;
- A : (nxu) boyutlu katsayı (tasarım) matrisi,
- $K_{\ell\ell}$: (nxn) boyutlu varyans-kovaryans matrisi

ile

- ℓ : (nx1) boyutlu ölçüler (olasılıksal değişkenler) vektörü,
- $E[v]$ 0 varsayımı ile $E[v]$: kalıntılar vektörünün beklenen değeri
- v : (nx1) boyutlu kalıntılar (olasılıksal değişkenler) vektörü,
- x : (ux1) boyutlu bilinmeyen parametreler vektörüdür ve
- K_{xx} : Varyans-kovaryans matrisi ile birlikte

kestirilecektir.

Belirli koşullar, örneğin A matrisinin rangı, sağlandığında x'in en iyi kestirim değeri \hat{x}

$$\hat{x} = (A^T K_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} A^T K_{\ell\ell}^{-1} \ell$$

eşitliği ile elde edilir. Kestirilecek parametrelerin varyans-kovaryans matrisi ise

$$K_{\hat{x}\hat{x}} = (A^T K_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} \quad \text{dir.}$$

Önceki tümede geçen en iyi'nin anlamı istatistiksel ilkeler ve aksiyomlar çerçevesinde tanımlanır. Yukarıda apriori usavurma ile türetilen eşitlikler ve ölçmenin fiziksel gerçeği arasında herhangi bir ilinti kurmak gerekli olmamıştır. Böylesi bir bağlantının formüle edilmesi ancak bundan sonra olanaklıdır.

Bu aşamaya, ℓ ' nin doğrultu, uzunluk, azimut, konum, yerçekimi kuvveti vb. ölçüleri, v 'nin bu ölçülerdeki raslantısal hatalara karşılık düzeltmeleri, x 'in bilinmeyenleri (genellikle yaklaşık koordinatlara bağlı olarak tanımlanan parametrelere gelmesi olası artımları) gösterdiği ve A 'nın x bilinmeyenleri ve ℓ ölçüleri arasında kurulan doğrusal fonksiyonel ilişkiyi tanımladığı varsayımıyla geçilebilir. Bunu x bilinmeyenlerinin ve onların varyans-kovaryans matrisi K_{xx} 'in yukarda verilen apriori eşitlikler yardımıyla kestirilmesi işlemi izler.

Böylece, belirli bir ağ geometrisi ve yapılan ya da yapılacak olan ölçülere ilişkin bir varyans-kovaryans matris yardımıyla apriori varyans analizine devam edilebilir. Ölçüler yardımıyla oluşturulan geometrik şekil, A 'yı ve bu ölçülerin varyansları ve kovaryansları, $K_{\ell\ell}$ 'i tanımlar. Buradan x bilinmeyenlerinin apriori varyans-kovaryans matrisinin elemanlarına ilişkin mantıksal sonuç,

$$K_{xx} = (A^T K_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1}$$

bağıntısından çıkarılabilir. Dikkat edilmesi gerekir ki, henüz hiç bir ölçüm yapılmamış sadece önerilmiştir. Ölçü aletleri hala kutularındadırlar. Kestirilecek parametrelerin apriori varyans-kovaryans matrisi K_{xx} , önerilen ölçüler önceden kabul edilmiş incelikle yapılmışlarsa, tasarlanan ağın duyarlılığının bir göstergesi olarak kullanılır. Eğer bu duyarlık değeri çok düşük (ya da çok yüksek) ise ağıdakilerden biri ya da ikisi, x 'in uygun bir varyans-kovaryans matrisinin elde edilmesine olanak sağlayacak şekilde değiştirilebilirler (Cooper, 1974):

- * Ağın geometrik şekli,
- * Ölçülerin türü ve sayısı,
- * Ölçülerin inceliği.

Kestirilecek parametrelerin değerlerine ilişkin hiç bir bilginin apriori usavurma yardımıyla elde edilemeyeceği gerçeği ile bir kez daha karşılaşılmaktadır. Yani,

$$\hat{x} = (A^T K_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} A^T K_{\ell\ell}^{-1} \ell$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ℓ ölçü değerleri olmaksızın bilinmeyenlerin kestirim değerlerini elde etmek olanaksızdır.

Ölçmeye geçmeden önce istatistiksel karar süreci ve fiziksel gerçek arasında bir bağlantı daha oluşturulmalıdır. Bu bağlantı ölçülerin apriori varyans-kovaryans matrisi $K_{\ell\ell}$ 'ye ilişkindir. Apriori olarak ölçülerin varyans-kovaryans matrisi bilinemez, Ancak ölçülerin yapıldığı ortama benzer koşullar altında daha önce bu alet ve yöntemlerden yararlanılmışsa ölçüler yapılmadan $K_{\ell\ell}$ matrisini oluşturmak için kullanılabilir bir deneysel kanıt vardır. Ölçülerin fiziksel olarak korelasyonsuz olmaları durumunda $K_{\ell\ell}$, köşegeni üzerinde ölçülerin varyansları bulunan köşegen bir matristir. Bundan başka, ölçülerin apriori varyans oranlarını türetmek de çoğu kez, olanaklıdır. Böylece, ölçülerin varyans matrisi $K_{\ell\ell} = \sigma_0^2 Q_{\ell\ell}$ olur, σ_0^2 skaler büyüklüğü varyans faktörü'dür ve $Q_{\ell\ell}$ ($n \times n$) boyutlu bir köşegen matristir. Eğer ölçülerin apriori varyans-kovaryans matrisi yerine $Q_{\ell\ell}$ kofaktör matrisi (bağıl varyans-kovaryans matrisi) alınır, bilinmeyenlerin apriori varyans-kovaryans matrisi

$$Q_{xx} = (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1}$$

olur.

Apriori önermeler ve fiziksel gerçek arasında oluşturulan bu bağlantılar ile şimdi ölçülerin yapılması ve onların aposteriori sonuçlara ulaşmak için kullanılması olanaklıdır. Sonuçlar ℓ ölçü değerlerine bağlıdır. Buna göre

$$\hat{x} = (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{\ell\ell}^{-1} \ell$$

dir.

($n \times 1$) boyutlu v vektörü, Gauss-Markov doğrusal modelinde x yerine kestirilmiş değer \hat{x} 'in konulmasıyla

$$v = A\hat{x} - \ell$$

elde edilir. Aposteriori varyans faktörü σ_0^2 'nin kestirim değeri

$$\hat{\sigma}_0^2 = v^T Q_{\ell\ell}^{-1} v / (n-u)$$

bağıntısından bulunur. $\hat{\sigma}_0^2$ bilinmeyenlerin aposteriori varyans-kovaryans matrisini elde etmek için kullanılır:

$$K_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{xx}$$

$$K_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A)^{-1}$$

Bu eşitlikteki $\hat{\sigma}_0^2$, $K_{\hat{x}\hat{x}}$ 'in deneysel kanıta dayandığını gösterir. Çünkü $\hat{\sigma}_0^2$; v'ler ile hesaplanır.

Yeterli çoklukta ölçü varsa, apriori ve aposteriori varyans faktörleri oranının 1'den farkı uygun test yöntemleriyle anlamlı (signifikant) bulunmazsa apriori varyans-kovaryans matrisi ölçüler için geçerlidir denir. Eğer bu oran 1'den daha büyük (ya da daha küçük) ise, bu durumda yorum, ölçüler apriori varyans-kovaryans matrisle tanımlandandan daha az (ya da çok) duyarlıdır, şeklindedir. Çok büyük bir oran, ölçüler arasında uyumsuz ya da sistematik hatalı ölçülerin varlığını, apriori önermenin fiziksel gerçeğe uygun düşmediğini gösterir. Apriori önerme ile fiziksel gerçeğin ne derecede doğru tanımlandığını görmek için başka sınamalar da yapılabilir. Örneğin,

$$E[v] = 0$$

olduğu varsayılmıştı, bu varsayım da bir hipotez olarak sınanabilir.

3. SONUC

Dikkat edilirse şu ana kadar dengeleme sözcüğü kullanılmamıştır. \hat{x} çözümlü Gauss-Markov doğrusal modeline ve ölçülerin bir apriori varyans matrisine göre ℓ ölçüleri yardımıyla kestirilmiştir. v'nin elemanları Gauss-Markov doğrusal modelinde ölçülerin birbirleriyle aposteriori ne ölçüde uyumsuzluklarını gösterir. Sadece bilinmeyenlerin yaklaşık değerlerinin dengelenmiş oldukları kabul edilir. Apriori ve aposteriori varyans faktörlerinin birbirine eşit olması apriori analiz modelin fiziksel ölçme ve deneysel sonuçlarla doğrulanmış olduğunu gösterir. Bununla beraber, $\hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2$ oranının, örneğin 10 olması, apriori modelin geçersiz kılınmasını gerektirmez. Bunun ℓ ölçü kümesi ile çeliştiği ve uygulanamayacağı anlamına gelir. Apriori ve aposteriori sonuçlar arasındaki farklılığı açıklamak için ℓ ölçüleri kesinlikle araştırılmalıdır.

K A Y N A K L A R

- /1/ Aksoy,A. : Matematik İstatistik Yöntemlerle Jeodezik Ölçülerin İrdelenmesi, Matbaa Teknisyenleri Basım-
evi, İstanbul, 1974.
- /2/ Armay,U. : Bilimsel Araştırma Teknikleri El Kitabı, Der
Yayınları, İstanbul, 1981.
- /3/ Aytaç,M. : Modern Dengeleme, İTÜ Matbaası, İstanbul, 1984.
- /4/ Cooper,M.A.R. : Fundamentals of Survey Measurement and Analysis,
Granada Pub.Co., London, 1974.
- /5/ Cooper,M.A.R. : A priori ve A posteriori Analysis, or Game and
Guess, Survey Review, Vol.26, 1982.
- /6/ Çoker,Y.D., : Matematik Terimleri Sözlüğü, Türk Dil Kurumu
T,Karaçay. Yayınları, No:508, Sevinç Basımevi, Ankara,1983.
- /7/ İnal,C., : İstatistik Terimleri Sözlüğü, Türk Dil Kurumu
Ö,Esensoy., Yayınları, No.:510, Sevinç Basımevi, Ankara,
Sözer,M.T. 1983.
- /8/ Mikhail,E.M., : Analysis and Adjustment of Survey Measurements,
G,Gracie. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1981.
- /9/ Öztürk,E. : Dengeleme Hesabı, Cilt:1, KTÜ Basımevi, Trabzon,
1987.
- /10/ Püsküllüoğlu,A. : Öz Türkçe Sözlük, Bilgi Yayınevi, No.:130, Sözlük
dizisi: 3,4.Baskı, İstanbul, 1975.
- /11/ Saraç,T. : Fransızca Türkçe Büyük Sözlük, Türk Dil Kurumu
Yayınları, Ankara, 1976.