AMPİRİK DENKLEMLER

Yazan : Yük. Müh. Em. Gnl.
Kerim EVİNAY

Ampirik Denklem :

Deneysel araştırmalarda, bağımsız değişkenlerinin değerleri bilinen, verilen veya gözlemle elde edilen değerlere karşılık belirli fonksiyonun değerlerinin tayini istenir.

Deneysel çalışmaları yapan kimseler kolaylık bakımından bağımsız değişkenlerle fonksiyon değerleri arasında bir denklem ve çizgesini elde bulundurmak sürekli görmek ve bunu her ölçüsünde kullanmak, karşılaştırmak ister. Böylece yürüdüğü yolda emniyet ve kontrol sağlar.

Gözlem sayısı, denklemdeki bilinmiyen katsayılar veya değişmezler sayısına eşit ise cebirsel ve ayni anda vaki denklemlerle kesin bir çözüm vardır.

Pratikte gerçeğe daha yakın, daha doğru değerler elde etmek, inceliği artırmak amaciyle Gözlemler, bilinmiyenlerin sayısından çok yapılır.

Gauss'un En Küçük Kareler Metodu ile Dengeleme Teorisinde gözlemlerin çok sayıda yapılmış olması şart koşulur.

Hataların olma belkiliği kabul edilirken hataların sayısı arttıkça gerçek değere yaklaşma artar.

Gözlem sayısı az olduğu hallerde sonuç gerçek değerden doğru değerden uzak veya büyük farklı olsa da, bu elde mevcut gözlemlerden en iyi en büyük ihtimalle en doğru değerin bulunması için dengeleme yapılır. Böylece kötü şartlar altında da mevcut gözlem değerlerinden en iyi en doğru değerin elde edilmesi sağlanır.

İki gözlem değerinin ortalamasını almak bile en küçük sayılan gözlem sayısı için başkaca değer elde yoksa başvurulması gereken yoldur.

Gözlem sayısı bilinmiyenler sayısından büyük olduğu hallerde dengeleme söz konusudur.

Gözlem sayısı bilinmiyenler sayısından az ise çözüm yapılamaz.

Gözlem sayısı bilinmiyenler sayısına eşit, ise kesin çözüm yapılabilir. Dengeleme yapılamaz.

Sonuç Olarak :

Deneysel araştırmalarda, bağımsız değişken ve fonksiyon değerleri ölçü ile elde edilir.

Gözlem sayısı bilinmiyenler sayısından çok yapılır. Böylece doğruluk ve incelik artırılmaya çalışılır.

Yapılan bu bir takım gözlemlerin en iyi, en büyük ihtimalle, temsil eden ve Gauss'un en Küçük Kareler Metodunu uygulamak şartiyle bulunacak denklemin tayini ana problemi teşkil eder.

Deneysel değerlere dayanarak tayin edilen bu ifadeye Ampirik Denklem denir.

Ampirik Denklemlerin Kullanış Yerleri :

Fizik, Geofizik, Astronomi, Geodezi ve benzeri bilim dallarında yapılan deneysel araştırmalara gerekli olan ölçü ve hesap işlerinde kullanılır. Kolaylık, sürat ve emniyeti sağlar.

Bağımsız değişkenler ve fonksiyon değerleri deney veya ölçü sonunda elde edilir.

Ampirik denklem, bu ölçüler gurubuna dayanan en iyi en büyük ihtimalle bu ölçüler gurubun temsil etmesi bakımından bu denklemlere interpolasyon denklemleri, interpolasyon denklemi denirse de asıl interpolasyon denklemleri ile karıştırılmamalıdır.

Ampirik denklem veya çizgesi, yalnızca gözlem değerlerine dayanan fonksiyon değerlerini bağımsız değişkenin herhangi bir değeri için interpolasyon yolunda tayine yarayabilir.

Ekstrapolasyon büyük hata doğurabileceğinden kaçınılmalıdır.

Ampirik denklemin gösterdiği doğru veya eğri düzgün olup gözlem değerleri ile olan farkları, hataları giderilmiş olduğundan interpolasyon uygun ve emniyetli olur.

Ekstrapolasyon kimi hallerde faydalı ve matematik kurallarına uygun düşerse de, ekstrapolasyon zorunluğu karşısında çok dikkatli olmalı ve belirli sınırları (limitleri) hiç bir zaman aşmamalıdır.

Fizik, geofizik, astronomi ve benzeri bilim dallarında bağımsız değişkenler ve fonksiyonları arasında teorik bir bağıntı kurmak imkânsız olduğu buna karşıt böyle bir bağıntının görüldüğü, olması gerektiği hallerde Ampirik Denklem ve Çözüm elde kalan tek çözüm yoludur.

Bu konuda seçilecek denklem şeklinin (doğru, parebol,...) teorik bir bağıntısı olması zorunluğu yoktur.

Böylece elde edilecek Ampirik Denklemler ileride teorik bağıntıların bulunmasına yol açabilir, yardımcı olabilir, ve bir çok hallerde böyle olmuştur.

Problemin çözümü güç, denklemin şeklinin (doğru, eğri...) seçimi zor olabilir.

Amaç : Elde mevcut, verilen veya gözlem değerlerinin uyabileceği, arasındaki farkların diğer deyişle hataların kareleri toplamının minimum olacağı fonksiyonu bulmaktır.

Hataların büyük olarak meydana çıktığı, ölçü ve gözlem değerlerini bozucu nitelik gösteren fonksiyonlar terk edilmeli ve yeterli sonuç verecek başka bir fonksiyon aranmalıdır.

Genel olarak doğru-birinci derece denklem, eğri-parabol..., daire, üslü fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, karışık problemlerde bunların toplamı... gibi fonksiyonlar denenmelidir.

Denemeden evvel gözlem değerleri, bağımsız değişkenler (x) ve fonksiyon değerleri (y) seçilecek uygun bir koordinat sistemi (dik açılı) ve ölçek ile çizge elde edilmeli bunlara en uygun (eniyi, en büyük ihtimalle) denk düşecek doğru eğri seçimi yapılmalıdır.

Bu seçimdeki hesap işini azaltmış olur.

Ampirik denklemin çıkartılmasında x,y değerleri bilinmeyen olmayıp, denklemdeki katsayıları ve değişmez sayılar bilinmiyenleri teşkil eder.

Burada x,y değerleri deney, gözlem ve benzeri yollarla verilen, bilinen değerlerdir. Ancak x ve y değerlerinde bir takım hatalar gizli bulunmaktadır.

Bu nedenle bilinen bu gözlem değerleri (x,y), de dengeleme yolu ile tayin edilen fonksiyon veya çizgisine oranla bir hata verir tam bulunan eğri üzerine düşmeyebilir. Denkleme konulunca bir fark, bir hata (v) verir.

Önemli olan bu hataların (v) kareleri toplamı (v^2) minimum olmasıdır.

Ampirik Denklem Şekilleri :

1) Doğru

$$y = ax + b$$

2) Parabol

Eğrilik düzgün ve sona doğru doğru durumuna yaklaşıyorsa

$y = ax^2 + bx + c$

3) Yüksek dereceden ve çok terimli Eğrilik keskin ve değişiyorsa

$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + ...$

4) Periyodik ise.

Sinüs, cosinüs, trigonometrik fonksiyon niteliğinde ise.

$$y = a + b \sin \frac{360^\circ}{m} x + c \cos \frac{360^\circ}{m} x$$

$$x + d \sin 2 x + e \cos \frac{360^\circ}{m} 2 x + ...$$

5) Üslü Fonksiyon ise

$y = a x^b$

$\log y = 10g \quad a + b \log X$

$In \ y = \ln \ a + b \ In \ X$

Logaritmalar birer sayı olduğundan; bu denklemler 1) maddede verilen

$y = a + b X$

Şeklini alır. Bu nedenle :

Ampirik denklemin tayini için yapılacak dengelemeden önce log X ve log y koordinat değerleri taşınmakla üslü fonksiyon bir doğru olarak elde edilmesi gerekeceğinden yapılan kabûlün doğru olup olmadığı hesap işleminden evvel kontrol edilebilir.

Üslü fonksiyonlarda, ağırlıklar eşit olsada, birinci derece denkleme indirgenmiş denklemlerin ağırlıkları indirgemeden evvelki ağırlıkların ayni olmaz.

Gözlemlerde, ağırlıklar :

$y_1 \quad W_1$

$y_2 \quad W_2$

$y_n \quad W_n$ ise

$\log y_1 \quad y^2 \quad W_1$

$\log y_2 \quad y_2^2 \quad W_2$

$\log y_n \quad y_n^2 \quad W_n$ olur

Diğer iki önemli dengeleme kuralı göz önünde tutulmalıdır. Bunlar :

1. Ağırlıklar ortalama hataların kareleri ile ters orantılıdır.

$$W_1 \; M_1^2 = W_2 \; M_2^2$$

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{W_2}{W_1}$$

Ağırlıklar nispî değerler, sayılarıdır. Bu nedenle tam sayılara indirgenir. Böylece ortalama g özlem değerine karşılık ağırlık birimine karşılık olan elemanlar gözlem sayısı o gözle mlerin ağırlığı olarak alınabilir.

2. Bir y— fonksiyonunun ortalama hatası, y nin ortalama hatası ile fonksiyonun y'e göre türevi ile çarpımına eşittir :

$$m_{\log y} = m_y \frac{d(\log y)}{dy} = m_y \cdot \frac{1}{y}$$

$$W_{\log y} = W_y \cdot y^2$$