

YÜZEY MODELLEMEDE ÜÇGENLEME YÖNTEMLERİ (TRIANGULATION METHODS IN SURFACE MODELLING)

Mustafa YANALAK

ÖZET

Konuma bağlı bilginin (yükseklik, jeoit ondülasyonu, gravite değeri vb.) üretiminin ve tüketiminin artması, konumsal bilginin modellenmesini ve ara değer enterpolasyonunu gerekli kılmıştır. Dayanak noktalarının işlenerek üçgenler ağı oluşturulması (üçgenleme), eşdeğer eğrilerinin çizimi ve enterpolasyon işlemi gibi harita mühendisleri için önemli olan konularda sıkça kullanılan bir çözüm yöntemidir. Üçgenleme özellikle düzensiz dağılım gösteren veri (dayanak) noktalarına bağlı veri (yüzey) modellemesinde kullanılmaktadır. Bu çalışmada yüzey modellemede üçgenleme yöntemleri özetlenmekte, bunlar içinde önemli biri olan Delaunay üçgenlemesi ayrıntılarıyla ele alınmaktadır. Delaunay üçgenlemesi için kullanılacak kriterler ve üçgenlemede karşılaşılan sorunlar hakkında bilgi verilmektedir.

ABSTRACT

Increase in the production and consumption of the positional information (height, geoid undulation, gravity value, etc.) has made it necessary, modeling of the positional information and interpolation of intermediate value. To form of triangles by processing base points (triangulation) is a solution method that is often used in subjects, which are important for surveying engineers such as drawing isolines and interpolation process. Triangulation is used in especially data (surface) modeling based on scattered data (base) points for surveying engineers. In this study, triangulation methods are summarized and Delaunay triangulation, which has an important position in it, are dealt with in details. The information is given about the criteria, which can be used for Delaunay triangulation, and problems, to which are faced in triangulation.

1. GİRİŞ

Konuma bağlı bilginin (yükseklik, jeoit ondülasyonu, gravite değeri vb.) üretiminin ve tüketiminin artması, konumsal bilginin modellenmesini ve gerektiğinde enterpolasyonla ara değer üretilmesini gerekli kılmıştır. Gelişen bilgisayar olanakları bu ihtiyacı daha kolay karşılanır hale getirmiştir. Fiziksel yeryüzü gibi düzgün olmayan yüzeylerin matematiksel olarak ifadesinde zorluklar vardır. Tam olarak ifade edilebilmesi için yüzeydeki tüm noktaların tanımlı olması gerekir ki bu da pratik olarak mümkün değildir. Uygulamada, yüzeyler örnekleme noktaları yardımıyla modellenir. “Dayanak noktası” veya “referans noktası” olarak adlandırılan. örnekleme noktaları elde edilme veya seçilme yöntemine bağlı olarak farklı konumsal dağılım gösterirler. Dayanak noktalarının düzensiz bir dağılım göstermesi yüzey modellemesinde sıkça karşılaşılan bir durumdur. Yüzey modellemesi yüzeyin tek bir fonksiyonla bütün olarak ifade edilmesiyle yapılabileceği gibi üçgen, kare, dikdörtgen ve benzeri geometrik şekillere bölünerek parça parça ifade edilmesiyle de yapılabilmektedir. Özellikle düzensiz dağılım gösteren dayanak noktalarına bağlı yüzey modellemesinde, dayanak noktalarının işlenerek üçgenler ağı

oluşturulması (üçgenleme), eşdeğer eğrilerinin (eşyükselti, eşondülasyon, eşgravite, eşeğim vb.) oluşturulması ve enterpolasyon işlemi gibi harita mühendisleri için önemli olan konularda sıkça kullanılan bir çözüm yöntemidir/27/.

Üçgenlemenin amacı sözkonusu yüzeyi, birbirleri üzerine binmeyen üçgen elemanların toplamı şeklinde ifade etmektir. Yüzeyi oluşturan üçgenlerin köşe noktaları dayanak noktalarıdır ve her bir dayanak noktası en az bir üçgenin köşe noktasını oluşturur. Üçgenleme 2, 3 ve daha büyük boyutlu uzaylarda gerçekleştirilebilir fakat bu çalışmada iki boyut ele alınmaktadır. Üçgenleme, dayanak noktalarının (x, y) konum koordinatları kullanılarak düzlemde gerçekleştirilmektedir. Üçgenleme rasgele konumda dağılmış veri noktalarının işlenmesi için kullanılabilir iyi bir yapıdır /9/. Üçgenlemenin amacı dayanak noktalarını ilişkilendirmektir. Bir üçgen kenarını oluşturan iki dayanak noktasının birbiri ile ilişkili olduğu düşünülür. Üçgenlemenin kalitesi dayanak noktaları arasındaki bu ilişkilendirmenin uygunluğuna bağlıdır. Aynı veri kullanılarak farklı üçgenler ağı oluşturulabilir. Bu üçgenlemelerden bazıları sistematik olan ve algoritması kurulabilen üçgenlemeler bazıları ise bir sistematığı bulunmayan dolayısıyla programlama olanağı olmayan üçgenlemelerdir. Elle yapılan uygulamalarda sistematik olmayan bir üçgenleme kullanılabilir, fakat. dayanak nokta sayısı arttığında elle uygulama olanağı azalır ve sistematik bir üçgenleme algoritması içeren bir yazılıma gerek duyulur. Bu nedenle üçgenleme terimi sistematik olarak modellenen üçgenlemeler olarak algılanmalıdır.

2. ÜÇGENLEME YÖNTEMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Üçgenleme algoritmaları, hedeflenen amaç ve kullanılan çözüm yöntemi esas alınarak iki farklı şekilde sınıflandırılabilir /22/.

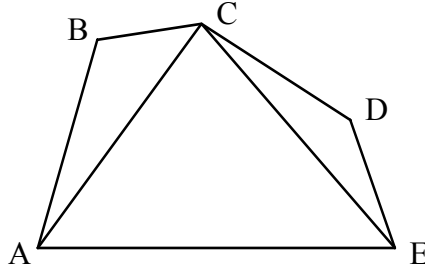
a. Amaca Göre Sınıflandırma

Üçgenlemede çoğunlukla kullanılan amaçlar şunlardır:

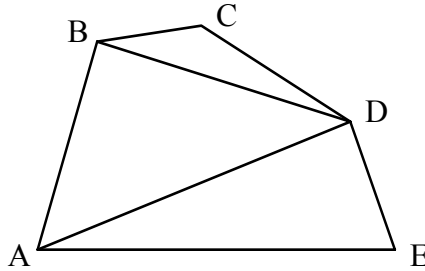
- Oluşan üçgenlerin eşkenar üçgenlere en yakın üçgenler olması, diğer bir deyişle, üçgenlerin iç açılarının 60° 'den farklarının az olması (eşaçılık özelliği),
- Oluşan üçgenler ağının kenarları toplamının minimum olması,
- Her bir üçgen oluşturulurken olası kenarlardan en kısa olanının seçilmesi /22/.

Amaca bağlı olarak, oluşacak üçgenler ağı da farklı olacaktır. Söz konusu amaçlar ve aralarındaki fark basit bir üçgenleme örneği üzerinde kolaylıkla anlaşılabilir. Şekil-1'de 5 dayanak noktası ve bunların 3 ayrı amaca uygun olarak üçgenlenmiş hali görülmektedir. Her üç üçgenlemede de veri alanını sınırlayan AB, BC, CD, DE ve EA kenarları ortak olarak bulunmaktadır. "Optimal üçgenleme" veya "minimum ağırlıklı üçgenleme" diye adlandırılan, kenarlar toplamını minimum yapan üçgenleme AC ve CE kenarlarını kullanmaktadır. Her bir üçgeni oluştururken olası kenarlardan en kısa olanı seçilerek yapılan üçgenlemede (Greedy üçgenlemesi), önce BD kenarı, sonra da geriye kalan ve BD'yi kesmeyen AD ve BE kenarlarından, daha kısa olan AD kenarı kullanılmaktadır. "Eşaçılık" özelliği diye adlandırılan ilk özelliği gerçekleştirmek için, bu özelliği taşıdığı kanıtlanmış olan Delaunay üçgenlemesi kullanılmıştır /18/. Bu üçgenlemenin ayrıntıları ileride verilecektir. Delaunay üçgenlemesi

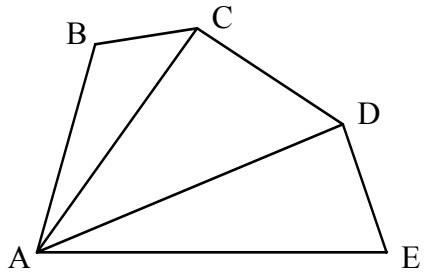
uygulandığında, AC ve AD kenarları kullanılır. Çünkü üçgenlemenin özelliği gereği, oluşan üçgenlerin çevrel çemberi içerisinde başka dayanak noktası yer almamaktadır /22/.



A(0.0, 0.0)	AC =6.20
B(1.4, 4.5)	CE =6.45
C(3.8, 4.9)	
D(7.15, 3.1)	
E(8.0, 0.0)	



A(0.0, 0.0)	BD =5.92
B(1.4, 4.5)	AD =7.79
C(3.8, 4.9)	
D(7.15, 3.1)	
E(8.0, 0.0)	



A(0.0, 0.0)	AC =6.20
B(1.4, 4.5)	AD =7.79
C(3.8, 4.9)	
D(7.15, 3.1)	
E(8.0, 0.0)	

Şekil-1: Üç Farklı Üçgenleme Örneği (Optimal, Greedy ve Delaunay)

b. Çözüm Yöntemine Göre Sınıflandırma

Üçgenleme algoritmaları, dayandıkları çözüm yöntemlerine göre iki genel gruba ayrılabilirler. Bunlardan birincisi, artan (incremental) yöntemler, ikincisi ise bölüp-birleştiren yöntemlerdir /22/. Artan yöntemler, veri alanının içindeki veya sınırındaki bir dayanak noktasından başlayıp adım adım diğer noktaları ağa katarak üçgenleme işlemini gerçekleştirir. Dalga dalga gelişen bir yapı içerisinde üçgenleme tanımlanır. Bu yöntemi kullanan algoritmalar için /1/, /2/, /3/, ve /12/ örnekleri verilebilir. Bölüp-birleştiren yöntemler, son üçgenleme oluşana kadar veri alanını ardışık olarak alt bölgelere ayıran yöntemlerdir. Veri alanını bölmek için kullanılacak yaklaşım, algoritmanın temelini oluşturur. Veri alanlarının alt kümelerine bölünmesi ve üçgenlemesi için geliştirilen algoritmalara /3/, /4/ ve /10/ da örnekler verilmektedir.

Bu ayrımın yanı sıra yöntemler, direkt ve iteratif yöntemler olarak da sınıflandırılabilir. Direkt yöntemler üçgenleme işlemini bir kerede tamamlayan algoritmalarlardır. İteratif yöntemlerde

ise ilk olarak keyfi bir üçgenleme oluşturulur, daha sonra seçilen bir optimizasyon kriteri kullanılarak, hiçbir üçgen kenarı değişmeye kadar üçgenleme iyileştirilir. Bu tür yöntemlerde genellikle Lawson'un "maksimum-minimum" kriteri kullanılır. Köşegen değiştirme işlemi içeren bu tip iteratif yöntemler /11/ ve /13/ de verilmektedir.

Bazı algoritmalarda ise araya sokma yöntemi kullanılır. İlk işlem olarak sadece veri alanını sınırlayan dayanak noktaları kullanarak üçgenleme işlemi yapılır. İçeride kalan dayanak noktaları sonradan teker teker üçgenlemeye dahil edilir. Araya sokulan nokta, içine düştüğü üçgenin köşe noktalarıyla birleştirildikten sonra optimizasyon kriteri uygulanır. Değişecek kenarlar ve üçgenler yenilenir. Araya sokma işlemi gerçekleştirilmenin ikinci bir yolu da şöyledir: Araya sokulan noktayı hangi üçgenlerin çevrel çemberlerinin içerdiği belirlenir. Bu üçgenlerin kenarları bir listeye yazılır. Listede iki kez geçen kenarlar ve bu kenarlara ait üçgenler iptal edilir. Bu silinen üçgenler yerine, araya sokulan nokta ile listede kalan kenarlar birleştirilerek elde edilecek üçgenler dahil edilir. Bu tür algoritmalar eşaçıllık özelliğini taşıyan Delaunay üçgenlemede kullanılmaktadır /3,20,21/.

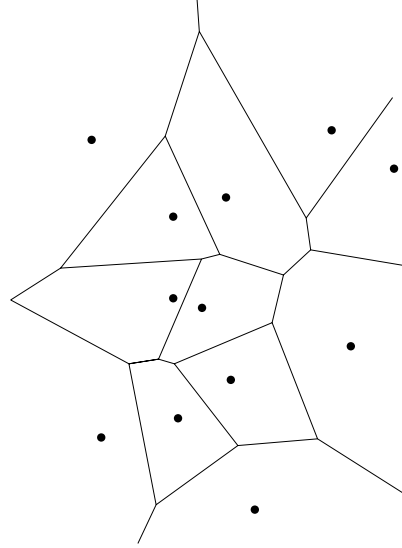
3. İYİ BİR ÜÇGENLEMEDEN BEKLENEN ÖZELLİKLER

Bir üçgenleme algoritmasından beklenen en önemli özellik tek anlamlı olmasıdır. Elde edilecek çözüm, başlangıç noktasından ve işlem sırasından bağımsız olmalıdır. Hesap yükünün ve bilgisayarda bilgi depolama gereğinin az olması üçgenleme algoritmalarından beklenen diğer iki özelliktir. Eşyüksele eğrili bir harita üretimine esas olacak bir üçgenleme algoritması, veri olarak, dayanak nokta kümesiyle birlikte önceden belirlenmiş ve üçgenlemede yer alması istenen kenarlar kümesini de kullanabilmelidir. Arazideki gerçek durum nedeniyle bir üçgen kenarı olması, doğruluk gereği zorunlu olan yapılanma çizgileri, oluşturulan üçgenler ağında yerlerini almalıdır. Bu çizgiler, su toplama ve su dağıtma çizgileri, bir dere yatağını belirleyen çizgiler, bir vadinin iki yakasını ayırt eden çizgiler, bir yol çizgisi veya eğim değişen arazi çizgisi olabilir. Yapılanma çizgilerinin üçgenleme işlemine dahil edilmesi sistematik bir üçgenlemenin düzenini bozar ve yerel müdahaleler gerektirir. Bu işlem üçgenleme esnasında yapılabileceği gibi, koşul göz önüne alınmadan yapılmış üçgenleme işlemi bittikten sonra gereken yerlerdeki (yapılanma çizgilerinin üçgen kenarlarını kestiği yerlerdeki) üçgenler yenilenecek yapılabılır /26/.

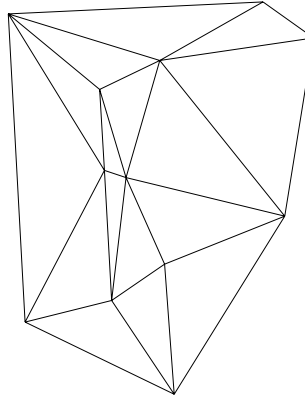
4. VORONOI DİYAGRAMI VE DELAUNAY ÜÇGENLEMESİ

Delaunay üçgenlemesi hesapsal geometride oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bu üçgenlemenin önemini anlayabilmek için geometrik olarak eşleniği sayılabilecek Voronoi diyagramının tanımlanması gerekir. Voronoi diyagramı literatürde Dirichlet, Thiessen veya Wigner-Seitz diyagramı olarak da anılmaktadır /19,22/. Düzlemde yer alan sonlu nokta kümesine ait herhangi bir noktaya, kümedeki diğer noktalardan daha yakın konumda bulunan düzlem noktalarının geometrik yerine o noktanın Voronoi Çokgeni (poligonu) denilmektedir. Kümedeki tüm noktaların Voronoi çokgenlerinin birleşimi, o kümenin Voronoi diyagramını oluşturur.

Şekil-2’de bir veri kümesi ve ona ait Voronoi diyagramı görülmektedir. Bu diyagram en yakın nokta problemleri için kullanılan kesin bir yapıdır. Bir noktanın Voronoi çokgeni herhangi bir noktayı, kendisine en yakın konumdaki komşu noktalardan ayırmaktadır. Çokgenin kenarları, nokta ile komşu noktaları birleştiren doğru parçalarının kenar orta dikmelerinden oluşmakta, her nokta kendisine ait komşu noktalar ile birleştirildiğinde Delaunay üçgenlemesi elde edilmektedir. Şekil-3’de Voronoi diyagramı verilmiş olan kümenin Delaunay üçgenleri görülmektedir.



Şekil-2: Voronoi Diyagramı



Şekil-3: Delaunay Üçgenlemesi

Delaunay üçgenlemesine ait bazı önemli özellikler şunlardır:

- Tek anlamlıdır. Başlangıç noktasından bağımsızdır.
- Oluşan üçgenler en olası eşkenar üçgenlerdir (eşaçılık özelliği). Çok dar açılı üçgenlerin oluşumu, dolayısıyla, birbirlerine uzak olan ve direkt ilişkisi bulunmayan noktalar arasında doğrusal bir ilişki kurulması engellenmektedir.

- c. Üçgenlerin çevrel çemberi içerisinde bir başka nokta yer almamaktadır(çevrel çember özelliği).
- d. Veri kümesinin dışbükey çerçevesi üçgenlemede yer almaktadır. Bir nokta kümesinin dışbükey çerçevesi o kümeyi içine alan en küçük çokgendir.
- e. Dayanak noktaları kümesinde birbirine en yakın konumda bulunan nokta çiftinin oluşturduğu doğru parçası üçgenlemede yer almaktadır.
- f. Her bir noktayı kendisine en yakın nokta ile birleştiren doğru parçası bir üçgen kenarını oluşturmaktadır /25,26/.

5. DELAUNAY ÜÇGENLEMESİNDE KULLANILAN KRİTERLER

Delaunay üçgenlemesinin iki önemli özelliği, kurulan algoritmaların temelini oluşturmaktadır. Bunlardan ilki yukarıda vurgulanan çevrel çember özelliği diğeri ise eşaçıllık özelliğidir.

a. Çevrel Çember Kriteri

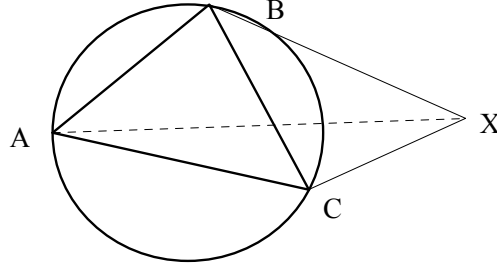
Delaunay üçgenlemesine ait bir üçgenin çevrel çemberi içerisinde başka bir dayanak noktası bulunamaz. 4 veya daha fazla noktanın aynı çember üzerinde yer alması bu kuralın istisnasıdır. Algoritmalarda bu özel durum dikkate alınmalıdır. Çelişkinin ortadan kalkması için algoritmaya bir seçim kriteri konulur. Çevrel çember kriteri genellikle artan üçgenleme yöntemlerinde kullanılan kriterdir. Her bir üçgenin 3. noktası belirlenirken bu üç noktanın çevrel çemberi içinde bir başka dayanak noktası olup olmadığı kontrol edilir. Çember içerisinde bir başka noktanın olduğu belirlenirse, belirlenen bu nokta yeni oluşacak üçgenin 3. köşesi olmaya aday olur. Aday üçgenin çevrel çemberi içerisinde bir başka nokta olup olmadığı kontrol edilir. Bu işlem çevrel çember içerisinde nokta kalmayana kadar devam eder ve üçgen oluşur.

Çember içerisinde başka nokta olup olmadığı önerilecek iki yolla kontrol edilebilir. Bunlardan birincisi, kontrol edilecek noktaların çember merkezlerine olan uzaklıklarını çemberin yarıçapıyla karşılaştırmaktır. Uzaklığı yarıçaptan küçük olan noktalar çember içerisinde bulunmaktadır. Uzaklıklardan bir veya birkaçının yarıçapa eşit olması biraz önce ele alınan özel durumun var olduğunu gösterir. Kontrol için kullanılacak 2. yol üçgenin bilinen kenarını gören açıları hesaplamaktır. Çevrel çember içerisinde kalıp kalmadığı kontrol edilecek tüm noktalarda üçgenin kesin kenarını gören açılar hesaplanır. Bu noktalardaki açılar üçgenin 3. noktasını oluşturması düşünülen noktadaki açı ile karşılaştırılır. Bu açıdan daha büyük açiya sahip noktalar çevrel çember içerisinde yer almaktadır. Daha küçük açiya sahip noktalar çember dışındadır. Aynı açiya sahip noktaların bulunması bu noktaların aynı çember üzerinde olduğunu gösterir.

b. Maksimum-Minimum Kriteri

Enterpolasyon amaçlı üçgenlemeler, üçgenlerin eşaçılı (eşkenar) üçgenlere yakın olması durumunda "iyi" bir üçgenleme olarak tanımlanırlar. /7/'de "maksimum-minimum açı" kriteri olarak adlandırılan bir kriter öne sürülmüştür. Bu kriter, üçgenlemede oluşan her dışbükey dörtgenin köşegeninin dikkatle seçilmesini önerir. Köşegenin oluşturduğu iki üçgenin mümkün olduğunca eşaçılı olması istenir. Bu kriterin açıklaması şöyledir:

Ortak bir kenarı paylaşan 2 üçgen bir dörtgen oluşturur. Bu dörtgenin köşegeni ortak olan kenardır. Eğer bu dörtgen dışbükey ise (Şekil-4) köşegenin alternatif köşegen ile değiştirilmesi, dörtgeni oluşturan 2 üçgenin 6 iç açısından minimum olanın değerini arttırmamalıdır. Bu kural bu şekilde tüm dışbükey dörtgenler için sağlanmalıdır.



Şekil-4: Dışbükey Dörtgen, Alternatif Köşegen ve Altı İç Aç

Böyle bir üçgenleme "Yerel Eşaçılı" üçgenleme olarak tanımlanır. Bu şekilde sadece bir üçgenlemenin var olduğu, bunun da Delaunay üçgenlemesi olduğu ayrı ayrı kanıtlanmıştır [8,18]. [8]'de maksimum-minimum kriterine dayanarak yerel optimal üçgenler elde etmek için dışbükey dörtgenlerin köşegenlerini değiştirmeyi öneren "Lokal Optimizasyon Prosedürü (LOP)" önerilmiştir. Üçgenleme işlemi, değişecek kenar kalmayana kadar LOP uygulanarak yapıldığında "maksimum-minimum" kriteri, Delaunay kriteri olarak da adlandırılan çevrel çember kriterini sağlamaktadır.

6. ÜÇGENLEMEDE KARŞILAŞILAN SORUNLAR

Üçgenleme algoritmalarının isteklere karşılık vermesi için çözümlenmesi gereken bazı sorunlar vardır. Algoritma hızlı çalışmalı, bilgi depolama gereksinimi az olmalı ve veri alanı için bir sınır tanımlanmış olmalıdır.

a. Hız

Algoritmaların doğru sonuç vermelerinin yanı sıra bu sonucu ne kadar kısa sürede verdiği algoritmanın etkinliğini gösteren bir kriterdir. Algoritmanın çalışma süresi yazılıma olduğu kadar kullanılan donanıma da bağlıdır. Bu nedenle algoritmanın etkinliğini donanımdan bağımsız olarak gözleyebilmek için dayanak nokta sayısının artımına bağlı olarak çalışma süresinin artımı incelenir. n adet dayanak noktası var olduğu düşünülürse, algoritmaların çalışma süresi ile dayanak nokta sayısı arasında üstel bir fonksiyon (logaritmik) olduğu ifade edilir.

Üçgenleme algoritmaları bazı hesaplamaların ve sorgulamaların defalarca tekrarını gerektirir. Çevrel çember merkezinin ve yarıçapının hesabı, bir kirişi gören çevre açının hesabı, bir noktanın çember içinde olup olmadığının sorgulanması veya çember içerisinde bir başka nokta olup olmadığının sorgulanması buna örnek olarak verilebilir. Defalarca tekrar gerektiren bu tür algoritmalarda, verilere ulaşmak veya verinin gereken kadarını kullanmak, hızı etkileyen en

önemli iki etkidir. Verilere hızlı bir şekilde ulaşmanın tek yolu verilerin sıralı halde bulunmasıyla mümkündür. Sıralı bir veriye ulaşmak büyük zaman tasarrufu sağlayacaktır. Kullanılacak sıralama yöntemi bile algoritmanın hızını büyük ölçüde etkileyecektir.

Veri kümesinin kutular şeklinde parçalara ayrılması algoritmaların hızlandırılması için kullanılan diğer bir yöntemdir. Veri kümesi x ve y yönünde eşit aralıklara bölünür. x ve y koordinatına göre ayrı ayrı sıralanan dayanak noktalarının hangi aralıklarda yer aldığına bakılarak, her bir dayanak noktasının içinde yer aldığı kutu belirlenir. Dolayısıyla her bir kutuda hangi dayanak noktalarının yer aldığı da saptanır. Bu kutu yapısı sayesinde veri alanı küçük parçalara bölünmüş olur. yukarıda sözü edilen hesap ve sorgulama işlemlerinde sadece ilgili kutulardaki dayanak noktaları kullanılarak tüm veri alanının taranmasına gerek kalmaz.

b. Depolama

Kullanılan bilgisayarların bellek kapasiteleri her ne kadar artmış bile olsa sonsuz değildir. Çok sayıda dayanak noktası ile çalışıldığında bellek yetersizlikleri ortaya çıkabilmektedir. Bellek sorunu, kullanılan programlama dilinin özelliklerine bağlı olarak farklı boyutlarda oluşur. Veri alanının parçalara ayrılmasını içeren algoritmalarda hız bakımından bir avantaj sağlanmasına karşın depolanması gereken bilgi sayısını arttırır. Bu nedenle bilgilerin özel bellek depolama yöntemleri veya farklı matris yapıları kullanılarak depolanması gerekebilir. Bilgisayar belleğinden yer kazanmak amacı ile uygulanabilecek bellek depolama yöntemleri için matrisin kare biçimde depolanması, yarı matrisin lineer depolanması, band matrisin dikdörtgen depolanması, band matrisin lineer depolanması ve değişken band matrisin lineer depolanması önerilebilir /14,15,16/. Direkt ve artan yöntemlerde hız sorunu daha belirgin olarak ortaya çıkmakla birlikte bellek sorunu diğer yöntemlere göre daha azdır. İyi bir üçgenleme yazılımı hız ve depolama sorununu yeterli düzeyde çözmelidir.

c. Veri Alanının Sınırlandırılması

Hesap işlemlerinin bir yerde kesilmesi amacıyla üçgenlenecek veri alanının bir sınır ile tanımlanması gerekir. Aksi halde algoritmalar nereye kadar komşu nokta araştırmasına devam edeceğini, işlemi nerede keseceğini belirleyemeyip sonsuz döngü içerisine girebilirler. Üçgenlemenin doğruluğu bakımından veri alanının sınırlandırılması gereği de ortaya çıkabilir. Özellikle fazla girintili çıkıntılı arazilerin uçlarına doğru gereksiz ve yanıltıcı üçgenler oluşur. Enterpolasyonla yanlış bilgi elde etmemek için bu üçgenler dışarıda kalacak şekilde veri alanı sınırlandırılabilir. Veri alanını sınırlandırmak amacıyla şimdiye kadar kullanılmış olan geometrik şekiller, tüm dayanak noktalarını içine alan bir üçgen, en küçük ve en büyük x ve y koordinatlarının sınırlandığı bir dikdörtgen veya seçilmiş bir çokgen olmuştur /1,2,4,9,10,11,13,20,22,23/.

Algoritmalarda en çok kullanılan geometrik şekil çokgendir. Bazı algoritmalarda başlangıç verisi olarak bir çokgen tanımlanır. Algoritma çalışırken bu çokgeni sınır olarak kabul eder. Bir çok algoritmada ise bu çokgen veri olarak başlangıçta verilmez. Algoritma bu çokgeni kendisi üretir. Veri alanının doğal sınırı olarak nitelenen bu özel çokgen "dışbükey çerçeve" olarak

adlandırılır /5,6, 9,17/. Bu yapı, hesapsal geometride önemli bir yer tutmaktadır. Bir nokta kümesi içerisindeki olası her iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki bütün noktalar bu kümenin noktaları ise bu tür noktalar kümesine "dışbükey küme" denir. Verilmiş bir noktalar kümesini içine alan en küçük dışbükey küme "dışbükey örtü" olarak adlandırılır /5,6,9,17/. Üçgenleme işlemlerinde olduğu gibi sadece iki boyutlu uzaylar düşünüldüğünde dışbükey örtüler bir düzlem parçası oluşturur. Sonlu sayıda veri noktasını içine alan dışbükey örtüler çokgen şeklindeki düzlem parçalarıdır. Özel durumlarda bu düzlem parçası üçgen, kare veya dikdörtgen şeklinde olabilir. Çokgen şeklindeki bir dışbükey örtüyü sınırlandıran çokgen o kümenin "dışbükey çerçevesi" olarak adlandırılır. Bir çok üçgenleme algoritması veri alanının sınırı olarak dışbükey çerçeveyi kullanmaktadır. /2/, /11/, /13/ ve /20/ bunlara örnek olarak verilebilir. Dışbükey çerçevenin en önemli özellikleri şunlardır:

Nokta kümesindeki tüm noktaları içine alan en küçük dışbükey çokgendir. Noktaları çevreleyen en kısa yoldur. Dışbükey çerçevenin (çokgenin) köşe noktaları veri kümesine ait noktalar. Kümeye ait herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen bu çokgen içinde kalır veya çokgenin bir kenarını oluşturur. Veri kümesini oluşturan dayanak noktaları içerisindeki en küçük x , y , $(x+y)$, $(x-y)$ ve en büyük x , y , $(x+y)$, $(x-y)$ koordinat değerlerine sahip noktalar dışbükey çerçevenin bir köşesini oluştururlar. Çokgen dışındaki bir doğru, çokgene doğru yaklaştırıldığında ilk olarak bir çerçeve noktası ile temas edecektir /24/.

7. SONUÇ

Yükseklik, jeoit ondülasyonu, gravite değeri ve benzeri yeryüzü bilgileri konuma bağlı bilgilerdir ve fiziksel yeryüzü düzenli bir yüzey olmadığı için noktadan noktaya farklılık gösterirler. Her noktada ölçme yapmak ideal, fakat pratikte mümkün olmayan bir yoldur. Bu nedenle ölçme yapılmamış noktalardaki ara değerlerin hesabı gerekecektir. Konumsal verinin modellenmesi ve ara değer interpolasyonu için üçgenleme yapısı sıkça kullanılan bir yöntemdir. Özellikle GPS uygulamalarının artması yerel jeoit modellemelerini ve ondülasyon değerlerinin interpolasyonunu gerektirmektedir. Bu çalışmada açıklanan Delaunay üçgenlemesinin, tek anlamlı olması ve eşkenar üçgenlere en yakın üçgenleri oluşturması özelliklerinden dolayı üçgenler ağı üzerinde yapılacak çalışmalarda altlık olarak kullanılması doğru bir seçim olacaktır.

KAYNAKLAR

- /1/ Auerbach, S., : Surface Representations Reproducing Given Digitized
Schaeben, H. Contour Lines, Mathematical Geology, Vol.22, No.6, 1990
- /2/ Fang, T.F., Piegl, L. A. : Algorithm for Delaunay Triangulation and Convex-hull
Computation Using a Sparse Matrix, Computer Aided
Design, Vol 24, No 8, 425-426, 1992

- /3/ Floriani, L.D., Falcidieno,: Delaunay Based Representation of Surfaces Defined Over Arbitrarily Shaped Domains, Computer Vision, Graphics and Image Processing, 32, 127-140,1985
- /4/ Garey, M.R., Johnson,: Triangulation of a Simple Polygon, Information Processing D.S., Preparata, F.P., Letters, Vol 7, Number 4, 171-179, 1978
Tarjan, R.E.
- /5/ Gürel, O. : Lineer Programlama, Dinamik Programlamaya Giriş, İ.T.Ü. Kütüphanesi, Elektronik Hesap Merkezi Yayınları, Sayı 4, 1966
- /6/ Larkin, B. J. : An Anı Program To Determine In Expected Lineer Time The Vertices of The Convex Hull of A Set of Planar Points, Computers and Geosciences, Vol 17, No 3, 431-443, 1991
- /7/ Lawson, C.L. : Generation of Triangular Grid With Application to Contour Plotting: California Institute of Technology, Technical Memorandum, No 229, 1972
- /8/ Lawson, C.L. : Software for C^1 Surface Interpolation, Rice, J., Ed., Mathematical Software III: Academic Press, New York, p 161-194, 1977
- /9/ Lee, D.T.; Preparata, F.P. : Computational Geometry - A Survey, IEEE Transactions On Computers, Vol c-33, No 12, December,1984
- /10/ Lewis, B.A,
Robinson, J.S : Triangulation of Planar Regions With Applications, The Computer Journal, 21 ,No 4 , 324-332, 1977
- /11/ Macedonio, G,
Pareschi, M.T : An Algorithm for The Triangulation of Arbitrarily Distributed Points: Applications to Volume Estimates and Terrain Fitting, Computers and Geosciences, Vol 17, No 7, 859-879, 1991
- /12/ Mc. Cullagh, M.J.,
Ross, C.G. : Delaunay Triangulation of a Random Data Set for Isarithmic Mapping, Vol. 17, No.2, pp.93-100, December, 1980
- /13/ Mirante, A.,
Weingarten, N. : The Radial Sweep Algorithm for Constructing Triangulated Irregular Networks, IEEE Computer Graph. Appl. Vol 2, No 3, 11-21, 1982
- /14/ Öztan, O. : Bir Otoyol Geçkisine Ait Triyngulasyon Ağında Prezisyon

- Araştırması ve Bazı Öneriler, İ.T.Ü. İnşaat Fak. Jeodezi ve Foto. Müh. Doçentlik Tezi, 1981
- /15/ Öztan, O. : Jeodezik Normal Denklemlerde Band Genişliği Üzerine Bir Eleştiri, İ.T.Ü. Dergisi, Cilt 41, Sayı 1-2, 1983
- /16/ Öztan, O. : Lineer Deklem Sistemlerinin Çözümünde Modern Bellek Depolama Yöntemleri, İ.T.Ü. Jeodezi Anabilim Dalı Semineri, 1986
- /17/ Sedgewick, R : Algorithms, Addison-Wesley, 1988
- /18/ Sibson, R : Locally Equiangular Triangulations, Computer. Journal, 21, 243-245, 1977
- /19/ Sukumar, N., Moran, B., Semenov, A., Belikov, V.V. : Natural Neighbour Galerkin Methods, International journal for numerical methods in Engineering, 50, 1-27, 2001
- /20/ Tsai, V.J.D. : Fast Topological Construction of Delaunay Triangulations and Voronoi Diagrams, Computers and Geosciences, Vol 19, No 10, 1463-1474, 1993
- /21/ Watson, D.F : Acorde : Automatic Contouring of Raw Data, Computers and Geosciences, Vol 8, No 1, 97-101, 1982
- /22/ Watson, D.F.; Philip, G.M. : Systematic Triangulations, Computer Vision, Graphics and Image Processing, 26, 217-223, 1984
- /23/ Watson, D.F., Philip, G.M. : Triangle Based Interpolation, Mathematical Geology, Vol 16, No 8, 779-795, 1984
- /24/ Watson, D.F : Contouring: A Guide to The Analysis and Display of Spatial Data, Pergamon press, 1992
- /25/ Worboys, M.F. : GIS: A Computing Perspective, Taylor & Francis Ltd., 2000
- /26/ Yanalak, M. : Sayısal Arazi Modellerinden Hacim Hesaplarında En Uygun Enterpolasyon Yönteminin Araştırılması, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1997
- /27/ Yanalak, M. : Transformation of Ellipsoid Heights to Local Leveling Heights, Journal of Surveying Engineering, 127, 3, 90-103, 2001

